Бардак никому не нужен

Из теоремы Шпрага-Гранди следует, что если посчитать функцию Гранди от каждой нитки, а потом взять `xor` от всех полученных значений, то мы получим значение $= 0$, если позиция Пети проигрышная, и значение > 0 иначе. Единственная проблема — ограничения на длины ниток в задаче достаточно большие, поэтому функцию Гранди по определению посчитать не получится.

Для решения давайте просто научимся считать функцию Гранди от нитки длины x. Для начала распишем значение функции Гранди по определению:

$$g(x) = \operatorname{mex}\big\{\, g(a) \oplus g(b) \;\big|\; a + b = x,\ \gcd(a, b) > 1 \big\}.$$

Утверждается, что:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 2 \text{ или } x \text{ нечётно}, \\ 1, & \text{если } x \equiv 0 \pmod 4, \\ 2, & \text{если } x \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

Во время контеста можно было несложно заметить эту закономерность, посчитав функцию Гранди для маленьких длин. Сейчас докажем её по индукции:

База для $1 \leqslant x \leqslant 3$ очевидна.

Пусть утверждение верно для всех $s < x$, тогда докажем для x.

Рассмотрим 3 случая:

1. x нечетно. Тогда все разбиения $x = a + b$ имеют вид: (четное число > 2) $+$ нечетное. Четное число не может быть равно двум, так как в таком случае не выполнится второе условие: обязательно будет $\gcd(2, x - 2) = 1$. Значит, по предположению индукции, $g(\text{нечетное}) = 0$, $g(\text{четное}) > 0$, тогда их $\oplus$ будет > 0, значит, в множестве $\big\{\, g(a) \oplus g(b) \;\big|\; a + b = x,\ \gcd(a, b) > 1 \big\}$ все числа будут > 0, то есть его mex будет равен нулю. То есть, функция Гранди от нечетного числа равна нулю.

2. $x \equiv 0 \pmod 4$. Возьмем разбиение $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$, получим $g(\frac{x}{2}) \oplus g(\frac{x}{2}) = 0$. При этом, `xor` $= 1$ получить нельзя, так как разрез на 2 нечетных даст 0, а разрез на 2 четных даст 0 или 3. Значит, mex будет равен 1.

3. $x \equiv 2 \pmod 4$. Рассмотрев разбиения $n = \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$ и $n = 2 + (n - 2)$, получим `xor` равный 0 и 1 соответственно. Из четности x очевидно, что `xor` равный 2 получить невозможно. Значит, $g(x) = 2$.

Далее нужно было посчитать функцию Гранди от длин всех ниток и взять `xor` полученных значений.

Итого, решение работает за $\mathcal{O}(n)$.