Квантовые коты

Если N — нечётное число, то просто запишем в ячейку i, j число $((i+j-2)\cdot \mathrm{inv2modN}) \mod N+1$, где $\mathrm{inv2modN} = (N+1)/2$ — число, обратное к 2 по умножению по модулю N, то есть $(2\cdot \mathrm{inv2modN}) \mod N = 1$.

Заполнение $(i+j-2) \mod N+1$ даст корректную расстановку без учёта ограничения на диагональ, так как сложение по модулю N образует группу. Умножение на inv2modN сделает корректной диагональ, так как без модулей $(i+i)/2 = i$.

Решим задачу для чётных N. Если $N = 2$, то расстановки не существует, для остальных чётных N — существует.

Представим, что у нас есть N/2 вариантов блоков из двух чисел размера 1 на 2, которые можно зеркально отражать. Пронумеруем каждый вариант от 1 до $N/2$ и на i-м варианте блока разместим числа i и $i+N/2$.

Таким блоками нужно замостить квадрат N на N. В высоту будет N блоков, в ширину N/2. Рассмотрим шаблон из блоков с подряд идущими номерами от 1 до $N/2$. Заполним таким шаблоном первую и вторую строку. Затем сделаем циклический сдвиг шаблона влево и заполним следующие две строки. И так далее до конца таблицы. Пример полученной таблицы для $N = 6$ можно увидеть на рисунке (а). Далее сделаем циклический сдвиг всей таблицы вверх (см. рисунок (б)).

Затем будем идти по ячейкам таблицы на диагонали, смотреть, к какому блоку они принадлежат, и отражать соответствующий блок, чтобы на диагонали оказалось нужное число. В примере первый блок остаётся неизменным (см. рисунок (в)), а второй отражается (см. рисунок (г)). Результат прохода по диагонали можно увидеть на рисунке (д), не отражённые блоки покрашены зелёным цветом, а отражённые — синим. После этого пройдёмся по всем остальным блокам и отразим те блоки, варианты которых уже встречались выше с тем же отражением. Итоговый результат можно увидеть на рисунке (е).

1	4	2	5	3	6
1	4	2	5	3	6
2	5	3	6	1	4
2	5	3	6	1	4
3	6	1	4	2	5
3	6	1	4	2	5

(а)

1	4	2	5	3	6
2	5	3	6	1	4
2	5	3	6	1	4
3	6	1	4	2	5
3	6	1	4	2	5
1	4	2	5	3	6

(б)

1	4	2	5	3	6
2	5	3	6	1	4
2	5	3	6	1	4
3	6	1	4	2	5
3	6	1	4	2	5
1	4	2	5	3	6

(в)

1	4	2	5	3	6
5	**2**	3	6	1	4
2	5	3	6	1	4
3	6	1	4	2	5
3	6	1	4	2	5
1	4	2	5	3	6

(г)

1	4	2	5	3	6
5	**2**	3	6	1	4
2	5	**3**	6	1	4
3	6	1	**4**	2	5
3	6	1	4	**5**	2
1	4	2	5	3	**6**

(д)

1	4	2	5	6	3
5	**2**	6	3	1	4
2	5	**3**	6	4	1
3	6	1	**4**	2	5
6	3	4	1	**5**	2
4	1	5	2	3	**6**

(е)

Изначальная расстановка блоков гарантирует, что в каждой строке каждое число от 1 до N встречается ровно один раз, а каждый вариант блока в каждом столбце встречается ровно два раза. Следовательно, отражениями можно всегда добиться, чтобы в каждом столбце каждое число от 1 до N встречалось ровно один раз. Изначальный выбор пар чисел для блоков и расстановка гарантируют, что на диагонали всегда будет стоять блок с нужным числом.