

Разбор задачи «Парадокс с дробями»

Автор задачи:	Никита Михайлов
Автор условия:	Андрей Станкевич
Подготовка решения и тестов:	Никита Михайлов
Автор разбора:	Никита Михайлов

Для начала упорядочим дроби в порядке неубывания. Это можно сделать любым алгоритмом сортировки за время $O(k^2)$ или $O(k \log k)$. Будем называть медианой дробей a/b и c/d дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

Заведём двумерный массив B , где $B_{i,j}$ — медиана дробей a_i и a_j . Теперь, для того чтобы найти ответ на задачу, нужно найти две такие ячейки этого массива $B_{a,c}$, $B_{b,d}$, для которых верны следующие условия:

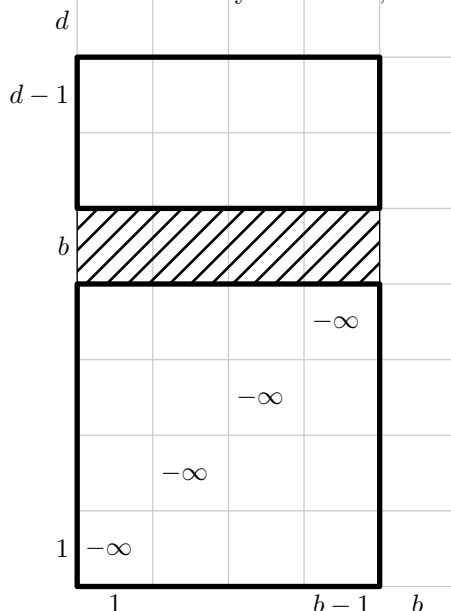
- $a < b$
- $c < d$
- a, b, c и d — различные числа
- $B_{a,c} - B_{b,d}$ максимально

Переберём ячейки массива (b, d) , для каждой из них найдём такую подходящую клетку (a, c) , в которой $B_{a,c}$ максимально. Будем, не ограничивая общности, считать, что $b < d$, так как всегда можно одновременно поменять местами b и d , а также a и c .

На первый взгляд для клетки (b, d) искомой клеткой будет минимум на прямоугольнике с угловыми клетками $(1, 1)$ и $(b-1, d-1)$. Однако эта клетка не всегда подходит, поскольку a, b, c и d должны быть различными числами, поэтому ячейки, для которых $a = c$ или $c = b$ не следует учитывать при поиске минимума.

Избавиться от ячеек, где $a = c$, легко, достаточно положить для них $B_{a,c} = -\infty$.

Чтобы избавиться от ячеек, для которых $b = c$ необходимо искать минимум не на одном, а на двух прямоугольниках: с угловыми клетками $(1, 1)$ и $(b-1, b-1)$, а также $(1, b+1)$ и $(b-1, d-1)$ (второй из них может отсутствовать, если $b = d$ или $b = d-1$).



Будем перебирать ячейки по возрастанию b , а при равных b по возрастанию d . В каждой строке будем хранить максимум m_i среди значений $B_{1,i}, B_{2,i}, \dots, B_{b-1,i}$. При переходе от d к $d' = d+1$ максимум на двух описанных прямоугольниках необходимо обновить значением m_d . При переходе от b к следующему значению $b' = b+1$ все значения m_i следует обновить значением $B_{b,i}$, а искомый максимум сделать равным максимуму значений m_1, m_2, \dots, m_b .

Итоговая сложность решения по времени: $O(k^2)$, по памяти: $O(k^2)$.