Разбор задачи «Восстановление числа»

Будем решать задачу методов «разделяй и властвуй».

Разобьем число пополам, для младшей половины переберм цифры вместо вопросиков и посчитаем остатки при делении на m. Для старшей половины проделаем то же самое.

Теперь нужно выбрать остаток из старшей половины и из младшей, так чтобы минимизировать результирующий остаток. Пусть мы выбрали остаток из старшей половины, равыни a, из младшей — b, тогда результирующий остаток будет равен $(a \times 10^k + b) \mod m$, где k — количество цифр в младшей половине числа.

Умножим все остатки из большей половины на 10^k по модулю m. Теперь отсортируем остатки в обеих частях. Это можно сделать двумя способами: либо обычной сортировкой, либо используя подход с битовыми масками.

Первый способ не представляет сложности в реализации, но с ним могли возникнуть проблемы со временем исполнения, так как нам нужно отсортировать два массива по 10^7 элементов каждый. Скорость выполнения этой части решения очень зависит от используемого вами языка и компилятора.

Второй подход с битовыми масками представлял следующее: будем хранить в каждой ячейке массива 32-битную маску — какие числа присутствуют в данном массиве. То есть, если число x присутствует в массиве, то в элементе массива $a[\frac{x}{32}]$, в бите под номером $x \mod 32$ будет записана единица, иначе — ноль.

Тогда для меньшей части пометим в этом массиве остатки, которые имеются в левой части числа и просто пройдем по числам от 0 до 10^7 и проверим, что соотвествующий бит равен единице. Размер этого массива будет составлять $\frac{10^7}{32}$, и сортировка произойдет за 10^7 операций.

Для большей части все немного сложнее, так как мы умножили все значения на 10^k и взяли по модулю m и теперь все значения лежат в промежутке от 0 до $m-1$. Заведем массив с битовыми масками, размером $\frac{m}{32}$. Пометим в нем все числа из правой части. Теперь нужно получить их в отсортированном порядке. Просто пройтись от 0 до m будет затратно по времени, поэтому воспользуемся свойством, что массив разрежен, и среди 10^9 значений в нем могут быть только 10^7. Будем проходить только по тем маскам, значения которых неравны нулю. Таких масок будет не более 10^7, и суммарный проход по всех их битам займет не более $32 \times 10^7 + \frac{m}{32}$. Также возможны оптимизации, которые уменьшают это количество до $\frac{m}{32}$.

Вернемся теперь к решению. Пусть мы отсортировали остатки в меньшей и большей половинах, обозначим эти массивы за l_i и r_j соотвественно. Теперь нужно выбрать из этих двух массивов такие остатки l_i и r_j, что $(l_i + r_j) \mod m$ минимально. Это можно сделать двумя указателями, заметив тот факт, что для каждого l_i минимальный остаток могут давать только два значения r: r_0 и такое r_k, что $l_i + r_k \geqslant m$, и $l_i + r_{k-1} < m$. Это следует из того, что для любых i, j: $l_i + r_j < 2 \times m$. То есть просто увеличиваем указатель i, и для каждого i уменьшаем k, пока не встретим первое такое r_{k-1}, что $l_i + r_{k-1} < m$.

Выбрав минимум из всех таких пар мы получим ответ.

Сложность данного решения либо: $\sqrt{n} + \frac{m}{32}$ либо $\log n \times \sqrt{n}$ в зависимости от реализации.