Разбор задачи «Автодополнение»

Добавим все слова из словаря в бор. В боре помимо обычных переходов go будем также хранить обратные переходы по буквам $back$ (означающие удаление буквы) и не более трех переходов, описывающих автодополнение — каждая вершина слова w имеет переход в вершину, обозначающую конец w. Так как популярность слова соответствует его индексу в словаре, хранить достаточно только первых три перехода, а остальные игнорировать.

После этого также добавим в бор требуемое сообщение s, однако уже без переходов-автодополнений. Пометим все вершины этого слова s как «хорошие» — при дописывании буквы в конец слова, оказаться мы можем только в них.

Осталось посчитать динамику на построенном боре. Пусть $dp[k][v]$ — количество способов оказаться в вершине бора под номером v, сделав при этом ровно k ходов. Тогда из этого состояния мы можем перейти в состояния $dp[k+1][back[v][c]]$ (удаление буквы), $dp[k+1][go[v][c]]$ (дописывание буквы, надо также не забыть проверить, что $go[v][c]$ — «хорошая» вершина и $dp[k+1][autocompletion[v][index]]$ (соглашение с автодополнением) для некоторых букв c (если такие состояние существуют, то есть существуют такие вершины в боре).

Ответом на задачу будет $\sum_{i \leqslant k} dp[i][finish]$, где $finish$ — номер вершины бора, соответствующей концу слова s. Асимптотика решения — $O(26 \cdot \sum(|w_i|) \cdot k)$.

Разбор задачи «Локи и Шахматы»

В качестве решения данной задачи предполагалось использовать какую-нибудь структуру данных. Например, дерево отрезков. Поступим следующим образом: для всех строк и столбцов заведем деревья отрезков. Каждый раз, когда нужно сдвинуть пешку в каком-либо направлении, будем находить первую пустую клетку в этом направлении. Это можно сделать так: бинарный поиск по длине отрезка, затем находить сумму в дереве отрезков. Если сумма равна длине отрезка, то сдвигать левую границу, иначе правую. Так же это можно сделать за один спуск. После того, как свободная клетка найдена (если такой нет, то делать ничего не нужно), остается присвоить ноль на предыдущую позицию пешки и единицу на только что найденную свободную клетку.

Разбор задачи «Великие Камбэки»

Заметим, что наибольшее число камбэков возможно, если один из бойцов нанесет один удар, а дальше каждый по очереди будет наносить по два удара.

Остается только перебрать, кто бил первым и, например, промоделировать бой, так как ограничения добрые.

Замечание: решения, в которых считалось, что начинать должен тот, у кого финальный счет больше, не работали, например, на тесте 3:7, так как на нем выгоднее начинать тому бойцу, счет которого три.

Разбор задачи «Побег с Асгарда»

Переберём, на какой из палуб будет ехать первая группа. Тогда все остальные должны разбиться на две палубы, что бы всем хватило места. Пусть суммарный размер всех групп кроме первой это D. Тогда если на первой палубе летит x человек, то на второй летит $D - x$. Если мы поймём, какие количества человек могут быть на первой палубе, то нам надо проверить, что хотя бы для одного из них, все остальные люди поместятся на вторую палубу. Что бы понять эти количества, можно воспользоваться задачей о рюкзаке, где в качестве предметов будут группы, а в качестве рюкзака — первая палуба.

Разбор задачи «Игра с числами»

Ответ -1 только если $a = b = 0$. Иначе заметим, что нам выгодно всегда брать либо максимальное число(оно же b), кроме возможно последнего шага, где может быть надо взять число чуть меньше, потому что мы можем взять любое число от 1 до b, либо всегда минимальное(оно же a), кроме возможно последнего шага. Исходя из этих замечаний несложно посчитать ответ на задачу.

Разбор задачи «Мобильная игра»

Желаемого результата можно достичь, если существуют два цвета таких, что количества камушков таких цветов равны по модулю 3.

Заметим, что a и b дают всегда одинаковый остаток по модулю 3, a и c дают одинаковый остаток по модулю 3 и b и c дают одинаковый остаток по модулю 3. Если существует способ получить такой набор, что два из трех чисел в нем равны 0, то те числа, которые станут равны 0 должны были изначально давать одинаковый остаток по модулю 3. Теперь докажем, что если изначально есть два таких числа, то можно их превратить в 0. Пока оба числа больше 0, будем брать по камушку этих цветов и получать два камушка третьего цвета. Когда камушков какого-то из цветов не осталось, если не осталось камушков ни одного из этих цветов, то мы получили искомый набор. Иначе, если количество камушков третьего цвета равно 0, то мы также получили искомый набор. Иначе, не умаляя общности, пусть осталось 0 камушков красного цвета, хотя бы 1 камушек зеленого цвета и хотя бы 1 камушек синего цвета. При этом, количество камушков зеленого цвета делится на 3 (а значит, их хотя бы 3), то есть количество камушков красного цвета по модулю 3 равно количеству камушков зеленого цвета по модулю 3. Тогда из зеленого и синего камушков получим два красных, потом из красного и зеленого два раза получим по два синих. В итоге, мы уменьшили количество зеленых камушков на 3. Будем так повторять, пока их не останется 0.

Разбор задачи «Тренировки Тора»

Будем отвечать на запросы в обратном порядке. Для начала, будем рассматривать рамку как не более чем 4 полоски $1 \times x$ или $y \times 1$. Так как отвечаем мы на запросы в обратном порядке, полоски не добавляются, а удаляются. Что происходит при удалении полоски?

При удалении полоски некоторые непораженные области объединяются. А именно, если у нас есть полоска $(x1, y1), (x2, y2)$, то объединиться могут только клетки в области $(x1-1, y1-1), (x2+1, y2+1)$ (так как $(x1, y1), (x2, y2)$ — полоска, то эта область размера не больше, чем $3 \times x$ или $y \times 3$. Используя СНМ (систему непересекающихся множеств) мы можем объединить все непораженные области за $O(\max(n, m))$.

Итоговая асимптотика: $O(q \cdot \max(n, m))$.

Разбор задачи «Красивое число»

Будем вычитать из данного числа наибольшее красивое число, меньшее его, пока не получим 0. После каждого вычитания полученное число будет меньше 111..1 (количество единиц равно длине числа). Следовательно, количество чисел в ответе не превзойдет длины исходного числа.