Разбор задачи «Монетки»

Применим алгоритм, похожий на решето Эратосфена. Возьмем последовательность $a_i = i^2 + 1$: 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, …

Возьмем первое число — $2 = 1^2 + 1$. Посмотрим, какие числа на него делятся (для них все 2 – это ответ) — это числа $(1 + 2 \cdot 0)^2 + 1$, $(1 + 2 \cdot 1)^2 + 1$, $(1 + 2 \cdot 2)^2 + 1$, …. Поделим все эти числа на 2 (на максимальную степень двойки, на которую они делятся), получим обновленную последовательность: 1, 5, 5, 17, 13, 37, 25, 65, …

Теперь возьмем следующее число – $5 = 2^2 + 1$. Посмотрим, какие числа делятся на него — это $(1 + 5 \cdot 0)^2 + 1$, $(1 + 5 \cdot 1)^2 + 1$, $(1 + 5 \cdot 2)^2 + 1$, … Поделим их все на 5 (тоже на максимальную степень 5, на которую они делятся): 1, 1, 5, 17, 13, 37, 1, 65, …

Теперь возьмем третье число — 5, опять проделаем ту же самую операцию, получим: 1, 1, 1, 17, 13, 37, 1, 13, …

Несложно доказать, что каждый очередной делитель (1, 5, 5, …), который мы берем — простое число или 1. Таким образом, мы находим все простые делители чисел вида $n^2 + 1$.

Алгоритм работает за $O(n + n/2 + n/3 + ... + n/n)$, что равно $O(n \log(n))$