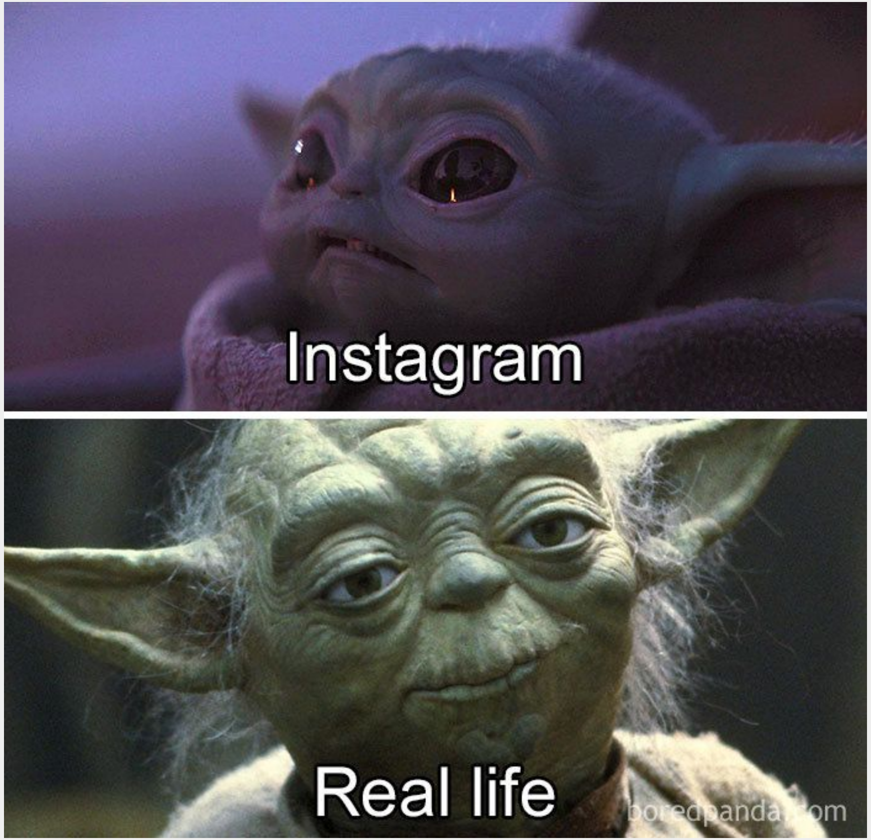
ИОИП 2020

Разбор задач

Задача А
Йода и приставки СИ

Автор: Будин Николай
Разработчик: Григорий Шовкопляс



Постановка задачи

- Дана строка, состоящая из нескольких приставок СИ и единицы измерения
  - Метр
  - Метр квадратный
  - Метр кубический
- Требуется перевести единицу измерения в метры

Решение

- Для решения задачи можно воспользоваться тем, что перечисленные в условии приставки являются префиксным кодом
- Это означает, что никакая из приставок не является префиксом другой приставки
- Поэтому, для разбиения строки на приставки, можно воспользоваться жадным алгоритмом
- Переберем приставку, которая является первой в строке
- Подойдет ровно одна
- Отрежем её

Решение. Квадратные и кубические метры

- Если в одном метре y единиц измерения
- В одном квадратном метре y^2 квадратных единиц измерения
- Если $y = 10^x$, то $y^2 = 10^{2x}$
- В одном кубическом метре y^3 кубических единиц измерения
- Если $y = 10^x$, то $y^3 = 10^{3x}$

Задача B
Джедайские вычисления

Автор: Орешников Даниил
Разработчик: Орешников Даниил

Постановка задачи

- Дано арифметическое выражение, состоящее из чисел и знаков ‘+’ и ‘-’
- Требуется удалить ровно один символ, чтобы значение получившегося выражения было максимально
- Знаки ‘+’ и ‘-’ всегда с обоих сторон соседствуют с цифрами
- Числа в выражении имеют длину от 2 до 9

Решение, $O(n^2)$

- Переберем удаляемый символ
- Вычислим значение получившегося выражения, пройдясь по его символам
- Можно воспользоваться функцией `eval` в python
  - Но в результате удаления символа, в выражении могло появиться число с лидирующим нулем
  - В этом случае, `eval` упадет с ошибкой
  - Нужно перед вызовом функции, удалить лидирующие нули в числах

Полное решение

- Переберем удаляемый символ
- Если удаляемый символ – цифра, в выражении меняется одно слагаемое, содержащее эту цифру
- Если удаляемый символ – операция ‘+’ или ‘-’, из выражения исчезают два слагаемых: до и после знака, и добавляется новое слагаемое, склеенное из слагаемых до и после знака
- Так как длины всех слагаемых не превышают *9*, удаление символа можно обработать за *O(1)*, то есть за суммарную длину изменяемых слагаемых

Задача C
Древний замок

Автор: Николай Будин
Разработчик: Арсений Кириллов

Постановка задачи

- Дано поле $n \times m$
- Некоторые клетки свободны, а некоторые содержат камни и непроходимы
- Начиная из стартовой клетки, нужно по-очереди коснуться k камней
- Чтобы коснуться камня, нужно встать в клетку, соседнюю с камнем
- В конце нужно дойти до финальной клетки

Решение подзадачи #1

- Так как $k = 0$, нужно просто найти кратчайшее расстояние от стартовой клетки до конечной

Решение подзадачи #2

- Для каждого камня, которого нужно коснуться, переберем в какую из *4* соседних с ним клеток нужно для этого встать
- После этого, у нас появится последовательность клеток, которые нужно по-очереди посетить
- Просуммируем минимальные расстояния между соседними клетками в последовательности
- Обновим ответ
- Асимптотика решения равна $O(4^k \cdot n \cdot m \cdot k)$

Полное решение

- Задачу можно решить методом динамического программирования
- Для *i*-го камня будем хранить *4* значения
- Минимальное время, которое требуется, чтобы коснуться всех камней до *i*-го, и затем прийти в клетку, соседнюю сверху/снизу/слева/справа с клеткой (x_i, y_i)
- Чтобы вычислить значения для *i*-го камня, переберем клетку в которой мы коснулись $(i - 1)$-го камня, вычислим кратчайшее расстояние между двумя клетками и обновим ответ

Задача D

Кроссворд для дроида

Автор: Николай Будин
Разработчик: Николай Будин

Постановка задачи

- Дано клетчатое поле
- Каждая клетка либо заблокирована, либо содержит цифру
- Слово – максимальный по включению вертикальный или горизонтальный отрезок клеток с цифрами
- Требуется изменить цифры таким образом, чтобы все слова стали палиндромами
- При этом, нужно минимизировать суммарное изменение цифр

Решение

- Каждое слово накладывает некоторые ограничения на значения цифр
- В каждом слове i-я цифра с начала должна быть равна i-й цифре с конца для всех i
- Проведем ребра между клетками, которые должны содержать одинаковые цифры
- Разобьем клетки на компоненты связности по получившимся ребрам
- Необходимо и достаточно, чтобы все клетки в каждой компоненте содержали одинаковые цифры

Решение

- Осталось понять, какую цифру выбрать в каждой компоненте связности
- Цифра, выбранная в одной компоненте никак не влияет на цифру, выбранную в другой компоненте
- Можно выбирать цифры независимо по компонентам
- Переберем цифру d
- Вычислим суммарное изменение в текущей компоненте связности, если цифры во всех клетках компоненты заменить на d
- Выберем оптимальную цифру

Задача E

Боевые дроиды

Автор: Ильдар Гайнуллин
Разработчик: Николай Будин

Постановка задачи

- Рассмотрим множество целых чисел
- За одну операцию можно удалить из множества два числа, равных *x*, и добавить число, равное $x + 1$
- Множество называется хорошим, если за несколько операций в нем можно оставить ровно одно число
- Дан массив целых чисел
- Требуется найти количество подотрезков массива, которые образуют хорошие множества

Решение

- Несложно доказать, что множество x_i является хорошим, если сумма 2^{xi} равна какой-то степени *2*
- Рассмотрим массив $b_i = 2^{ai}$
- Нужно найти количество подотрезков массива b_i, которые равны некоторой степени *2*

Решение, $O(n^2)$, $a_i \le 30$

- Так как значения b_i не превосходят 2^{30}, их сумма помещается в стандартный тип для целых чисел
- Переберем отрезок массива
- Вычислим сумму b_i на этом отрезке с помощью префиксных сумм
- Проверим, что сумма равна степени 2

Решение, $O(n^2)$

- Значения b_i могут быть большими и не помещаются в стандартные типы данных
- Возьмем значения b_i по модулю P, где P – простое число
- Заметим, что если сумма $2^{xi} = 2^y$, то $y \le max(x_i) + log(n)$
- Поэтому, есть $n \cdot log(n)$ возможных степеней 2, которые могут получиться в результате суммы на отрезке
- Положим все возможные значения степеней 2 по модулю P в словарь
- Переберем отрезок массива
- Вычислим сумму на отрезке
- Проверим, есть ли такая сумма в словаре

Оценка *P* для решения

- Всего в массиве $O(n^2)$ отрезков
- Если отрезок соответствует плохому множеству, вероятность ошибки на этом отрезке равна $n \cdot log(n) / P$
- Вероятность не допустить ошибку ни на одном отрезке равна $(1 - n \cdot log(n) / P)^{n \cdot n}$
- При $n = 5000$ и $P = 10^9$, вероятность не допустить ошибку очень мала
- А при $n = 5000$ и $P = 10^{18}$, она порядка 0.99999893

Полное решение

- Воспользуемся методом “Разделяй и властвуй”
- Выберем с какой стороны от точки разреза будет находиться максимум на отрезке
- Переберем длину части отрезка с этой стороны от разреза
- Переберем *log(n)* вариантов итоговой суммы
- Вычислим, какую сумму должны иметь числа из отрезка по другую сторону от разреза
- Прибавим к ответу количество различных длин во второй половине, которые дают нужную сумму

Оценка *P* для полного решения

- Вероятность не допустить ошибку ни на одном отрезке равна
  $(1 - \log(n) / P)^{n \cdot n}$
- При $n = 200000$ и $P = 10^9$, вероятность не допустить ошибку порядка 0.8
- А при $n = 200000$ и $P = 10^{18}$, она очень близка к 1