Лемурьи вечеринки

Автор задачи и разработчик: Даниил Орешников

Для решения этой задачи достаточно переформулировать ее в терминах сочетаний и научиться считать частное факториалов по непростому модулю. Если C_a^b — число способов выбрать b элементов из a различных, то ответом на задачу будет

$$\sum_{t=0}^{k} C_k^t \cdot C_{k-t}^{n-2t}$$

Действительно, нам надо выбрать на n мест различными способоми какие виды лемуров будут представлены двумя лемурами, а какие — одним. Переберем количество «пар» лемуров t. Для фиксированного t: выбрать t пар можно C_k^t способами, а на оставшиеся $n-2t$ места надо разместить по одному лемуру из некоторых из оставшихся $k-t$ видов.

Теперь вспомним, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (где $x!$ — произведение всех чисел от 1 до x. Предподсчитаем все факториалы от 0 до n, но каждое значение будем хранить как набор степеней простых, делящих m, и часть, взаимно простая с m. Иными словами, запишем число v как $(d_0, \ldots, d_r, X)$ такие, что m делится на $\frac{v}{X} = p_0^{d_0} \cdot \ldots \cdot p_r^{d_r}$ и $\gcd(X, m) = 1$ (где $\{p_i\}$ — все простые из разложения m на простые делители). Для того, чтобы работать с такими представлениями, надо в самом начале разложить m за простые, что можно сделать перебором делителей.

Пересчет таких значений можно осуществлять за $\mathcal{O}(r)$, которое с большим запасом можно оценить сверху как $\log n$. Деление v на w реализуем как поэлементное вычитание соотвествующих степеней простых и деление X_v на X_w по модулю m, которое можно реализовать с помощью расширенного алгоритма Евклида (который может найти обратное по модулю m к X_w). Остается только перебрать t и посчитать ответ, суммарное время работы — $\mathcal{O}(\sqrt{m} + n \log n)$.