

Перестроение лемуров

Автор и разработчик задачи: Ильдар Гайнуллин

Нам нужно разделить перестановку на несколько подотрезков, минимизировав их суммарную стоимость. Цена одного подотрезка равна x плюс количество инверсий на этом подотрезке.

Обозначим количество инверсий на отрезке за $f_{l,r}$.

Заметим, что $f_{l,r} = f_{l+1,r} + f_{l,r-1} - f_{l+1,r-1} + (1, \text{ если } p_l > p_r)$.

Значит, $f_{l,r} + f_{l+1,r-1} \geq f_{l+1,r} + f_{l,r-1}$, поэтому мы можем воспользоваться некоторыми оптимизациями ДП для решения этой задачи.

Будем оптимизировать $dp_i = \min(dp_j + f_{j+1,i})$.

Будем вычислять это ДП, используя метод Разделяй и властвуй.

Для начала, вычислим значения ДП для состояний $1, \dots, \frac{n}{2}$ (рекурсивно).

Затем, нужно произвести пересчет значений $j > \frac{n}{2}$ через значения $i \leq \frac{n}{2}$. И затем, нужно будет рекурсивно вычислить значения для состояний $\frac{n}{2} + 1, \dots, n$.

Обратите внимание, что благодаря свойству нашей функции, оптимальное $i \leq \frac{n}{2}$ для j — монотонно возрастает при возрастании j .

Поэтому, можно воспользоваться методом Разделяй и властвуй для монотонных функций. Сначала найдем оптимальную точку для $i = \frac{(l+r)}{2}$ и затем рекурсивно разобьемся на две половины.

Но как вычислить $f_{l,r}$?

Во время Разделяй и властвуй, нам нужно будет переместить l и r только $\mathcal{O}(n \log n)$ раз суммарно. Поэтому, мы можем поддерживать $f_{l,r}$ и изменять его, когда нам нужно увеличить/уменьшить l/r . Это можно сделать с помощью дерева Фенвика, получив решение за **очень** быстрый $\mathcal{O}(n \log^3 n)$.

Также, можно предподсчитать некоторую информацию, используя SQRT декомпозицию. Можно заметить, что наши запросы выражаются через запросы вида «найти количество чисел $\leq x$ на отрезке $l \dots r$ ». Используя sqrt декомпозицию, мы можем отвечать на эти запросы за $\mathcal{O}(1)$ с предподсчетом за $\mathcal{O}(n\sqrt{n})$, в итоге получится решение за $\mathcal{O}(n \log^2 n + n\sqrt{n})$.