Подрыв ветряка

Автор задачи: Владимир Рябчун, разработчики: Даниил Орешников и Владимир Рябчун

Для решения первой подзадачи можно было не делать никаких наблюдений относительно того, в каком порядке надо отключать элементы — достаточно было перебрать все возможные перестановки и попробовать отключать их в таком порядке, пока к следующему элементу есть доступ. С помощью `std::next_permutation` решение можно было написать совсем коротко.

Вторая подзадача, аналогично, решалась полным перебором, однако здесь стоило применить динамическое программирования по подмножествам, $\mathtt{dp}[mask]$ — минимальная стабильность, начиная с которой можно отключить в некотором порядке все элементы, закодированные маской $mask$. Пересчет динамики осуществлялся перебором первого элемента для отключения. Время работы решения — $\mathcal{O}(2^n \cdot n)$.

Для решения следующих подгрупп следовало сделать некоторые наблюдения относительно порядка отключения элементов.

Для начала заметим, что если какой-то конечной стабильности можно добиться, то ее также можно добиться, отключая сначала только элементы с положительными b_i, а затем — только с отрицательными. Действительно, если мы сначала можем отключить элемент с отрицательным b_i, а затем с положительным b_j, то $s \geqslant a_i$ и $s - |b_i| \geqslant a_j$. Из этого следует, что $s + b_j \geqslant a_i$ и $s \geqslant a_j$, а значит их можно с тем же результатом отключить в противоположном порядке.

Аналогичное наблюдение можно сделать и касательно порядка, в котором можно отключать «положительные» элементы — если это можно сделать в каком-то порядке, то можно сделать и порядке возрастания a_i. Доказательство еще проще — при их отключении стабильность только растет, значит если элемент с большим a_i можно было отключить раньше, его можно будет отключить и позже.

Это позволяет решить третью подзадачу аналогично задаче о рюкзаке: отсортируем все «положительные» элементы по возрастанию a_i и посчитаем $\mathtt{dp}[t][x]$ — «можно ли получить стабильность x, отключая только элементы из числа первых t». Пересчет динамики будет следующий:

$$\mathtt{dp}[t][x] = \begin{cases} \mathtt{dp}[t-1][x] & \text{если } x - b_t < a_t \\ \mathtt{dp}[t-1][x] \text{ or } \mathtt{dp}[t-1][x-b_t] & \text{иначе.} \end{cases}$$

После чего достаточно найти минимальное такое S, которое можно получить с помощью «положительных» элементов, и при котором можно отключить единственный «отрицательный». Если итоговое значение после его отключения лучше изначальной стабильности, оно и будет ответом. Время работы решения — $\mathcal{O}\left(n \cdot (s + \sum |b_i|)\right)$.

Если все отрицательные b_i равны между собой, то можно сделать аналогичное наблюдение о том, что их можно применять в порядке уменьшения a_i и получить все то же множество возможных результатов. Доказательство полностью аналогично рассмотренным выше. В таком случае достаточно объединить идеи второй и третьей подзадач: посчитаем

- $\mathtt{dp}^+[t][x]$ — можно ли получить стабильность x отключением каких-то из первых (по возрастанию a_i) t «положительных» элементов;
- $\mathtt{dp}^-[t][x]$ — минимальная стабильность, которую можно получить из x только отключением каких-то из первых (по возрастанию a_i) t «отрицательных» элементов.

Пересчет такой динамики аналогичен, $\mathtt{dp}^-[t][x]$ равно либо $\mathtt{dp}^-[t-1][x]$, либо $\mathtt{dp}^-[t-1][x+b_t]$, если $x \geqslant a_t$. Достаточно выбрать минимальное возможное значение. Время работы решения такое же, как и в предыдущей подгруппе.

В последних двух подгруппах отличие в том, что не всегда можно прийти к оптимальному ответу, отключая «отрицательные» элементы в порядке убываения a_i. В предпоследней подгруппе можно было исправить это, взяв динамику, описанную во второй подгруппе вместо пятой. Для полного решения же можно доказать, что достаточно отключать «отрицательные» элементы в порядке убывания $a_i + b_i$.

Действительно, пусть $a_i + b_i < a_j + b_j$ и верны неравенства

$$\begin{cases} s \geqslant a_i \\ s + b_i \geqslant a_j. \end{cases}$$

Из второго неравенства следует, что $s \geqslant a_j - b_i$, что больше $a_i - b_j$ по нашему предположению. А из этого как раз следует, что

$$\begin{cases} s \geqslant a_j & \text{так как } b_i < 0 \\ s + b_j \geqslant a_i, \end{cases}$$

а значит соответствующие элементы можно отключить в обратном порядке. Дальше достаточно применить решение из пятой подгруппы, только отсортировать «отрицательные» элементы в порядке возрастания $a_i + b_i$. Время работы решения то же самое.