В погоне за Пингвином

Автор задачи: Мария Жогова, разработчики: Владимир Рябчун и Даниил Орешников

Для решения первых двух подзадач можно было написать полный перебор возможных действий. Во второй подзадаче следовало помечать точки как достижимые, и при попадании в какую-то точку по второму разу не перебирать дальнейшие перемещения из нее.

Для решения остальных подзадач заметим следующий факт. Пусть всего было сделано x шагов вперед и y шагов вправо, тогда суммарно за такие перемещения было потрачено $ax + by$ топлива. Таким образом, все достижимые точки можно описать уравнением $ax + by \leqslant s$. Задача сводится к тому, чтобы найти количество целочисленных решений такого уравнения.

В четвертой подзадаче проходит следующее решение: переберем количество сделанных шагов вправо f, тогда на движение прямо останется $S - af$ топлива, за которое можно попасть в точки от $(f, 0)$ до $(\left\lfloor \frac{s-af}{b} \right\rfloor, 0)$. Посчитать сумму таких величин по всем f можно за время $\mathcal{O}\left(\left\lfloor \frac{s}{a} \right\rfloor\right)$.

В третьей подзадаче можно было заметить, что при целых $\frac{s}{b}$ и $\frac{s}{a}$ количество точек с целыми координатами в треугольнике между точками $(0, 0)$, $(0, \left\lfloor \frac{s}{b} \right\rfloor)$ и $(\left\lfloor \frac{s}{a} \right\rfloor, 0)$ равно половине точек с целыми координатами в прямоугольнике с вершиной в точке $(\frac{s}{a}, \frac{s}{b})$, не считая точек на диагонали $ax + by = S$.

Точки в таком прямоугольнике посчитать просто: их ровно $\left(\frac{s}{a} + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{b} + 1\right)$. А точки на диагонали следут между крайними с шагом $\left(+\frac{a}{\gcd(a,b)}, -\frac{b}{\gcd(a,b)}\right)$, то есть их количество равно $\frac{s \cdot \gcd(a,b)}{ab} + 1$. Осталось сложить и поделить пополам, время работы решения — $\mathcal{O}(1)$.

Для решения оставшихся подгрупп внимательнее рассмотрим формулу для ответа, которую получили ранее:

$$\left\lfloor \frac{s}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s-a}{b} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{s - \left\lfloor \frac{s}{a} \right\rfloor a}{b} \right\rfloor.$$

Представим каждую дробь $\left\lfloor \frac{s-ta}{b} \right\rfloor$ как $\frac{s-ta}{b} - \frac{(s-ta) \bmod b}{b}$. Слагаемые первого вида образуют арифметическую прогрессию (за d_a обозначим $\left\lfloor \frac{s}{a} \right\rfloor$):

$$\frac{s}{b} + \frac{s-a}{b} + \ldots + \frac{s - d_a a}{b} = \frac{1}{b} \cdot \left(s(d_a + 1) - a\frac{d_a(d_a+1)}{2} \right).$$

А слагаемые второго вида образуют последовательность остатков по модулю b, начинающуюся в $s \bmod b$ и идущую с шагом $-a$. Можно заметить, что каждые $\frac{b}{\gcd(a,b)}$ идущих подряд элементов этой последовательности образуют период из остатков вида $(a \bmod b) + k\gcd(a, b)$ для целых k (просто записанных в другом порядке). Сумму такого периода тоже можно посчитать по формуле геометрической прогрессии, а количество периодов, которые целиком войдут в ответ, равно $\left\lfloor \frac{d_a + 1}{\frac{b}{\gcd(a,b)}} \right\rfloor$.

После останется только хвост из остатков, которых меньше, чем длина периода. Но в таком случае их сумму можно просто посчитать циклом за $\mathcal{O}(b)$.

Для полного решения достаточно выбрать оптимальное из двух решений: за $\mathcal{O}\left(\frac{s}{b}\right)$ и за $\mathcal{O}(b)$ для каждого набора входных данных в зависимости от того, какая из двух величин меньше.