Связь с Эйвой

Автор задачи: Даниил Орешников, разработчик: Константин Бац

Для решения первой подзадачи нужно было сделать несколько переборов. Переберем генетические коды первого и второго Аватаров для рекомбинации, сравним полученный код со всеми кодами в первом поколении. Все существует n кодов, сравнение двух кодов происходит за $\mathcal{O}(n)$. Таким образом, сложность такого решения — $\mathcal{O}(n^4)$.

Во второй подзадаче в строке было не больше двух символов '`b`', а все остальные символы были равны '`a`'. Рассмотрим случаи:

- В строке только символы '`a`'. Тогда ответ вопрос задачи — 0.

- В строке только один символ '`b`'. Тогда, вне зависимости от расположения символа '`b`', путем рекомбинации можно получить коды, в которых содержится от нуля до двух символов '`b`'. Новыми из них будут только те, которые содержат ноль или два символа '`b`'.

  Получить код без символа '`b`' можно рекомбинацией кода, у которого символ '`b`' на четной позиции, и кода с символом '`b`' на нечетной позиции. Кодов обоих видов $\frac{n}{2}$, поэтому существует $\frac{n^2}{4}$ различных пар индексов.

  На самом деле, получить код с двумя символами '`b`' можно получить из тех же пар индексов, если элементы пар поменять местами. То есть существует столько же ($\frac{n^2}{4}$) подходящих пар индексов.

  Таким образом, ответ в этом случае равен $\frac{n^2}{2}$.

- В строке два символа '`b`'. Для решения этого случая надо сделать ключевое наблюдение: *количество способов получить каждый циклический сдвиг s с помощью рекомбинации одинаково.* Действительно, если рекомбинация i и j дает k, то рекомбинация $(i+t) \bmod n$ и $(j+t) \bmod n$ даст $(k+t) \bmod n$.

  – Пусть два символа '`b`' стоят в s на позициях разной четности. В таком случае, какие бы два кода для рекомбинации мы ни выбрали, из каждого будет выбрана ровно одна буква '`b`', и в итоговом коде тоже будут ровно две буквы '`b`'.

    Заметим, что четные и нечетные позиции любого циклического сдвига сами являются циклическим сдвигом строки «`aa...ab`» (длины $\frac{n}{2}$). Тогда сколько есть способов получить строку s с помощью рекомбинации? Необходимо выбрать два сдвига, у которых '`b`' стоит на строго определенных позициях среди четных и нечетных соответственно. И тех, и тех, ровно по 2, поэтому всего есть ровно 4 способа получить строку s.

    Всего есть n^2 пар особей, из них надо вычесть по 4 на каждый различный циклический сдвиг s. Всего различных циклических сдвигов s либо n, либо $\frac{n}{2}$, если '`b`' стоят на расстоянии $\neq \frac{n}{2}$ или $= \frac{n}{2}$ соответственно.

  – Последний случай — когда два символа '`b`' стоят на позициях одной четности. Тогда у каждого циклического сдвига позиции одной четности содержат только буквы '`a`', а другой — две буквы '`b`' на одном и том же расстоянии друг от друга.

    Результатом рекомбинации, таким образом, будет либо строка только из букв '`a`' (новая), либо строка с двумя буквами '`b`' на том же расстоянии, что и в s (старая), либо строка с четырьмя буквами '`b`' (новая).

    Чтобы получить строку из всех '`a`', каждую из особей для рекомбинации можно выбрать $\frac{n}{2}$ способами. Чтобы получить строку с четырьмя '`b`', тоже. Ответ — $\frac{n^2}{2}$.

Для решения третьей подзадачи нужно было немного оптимизировать решение первой подзадачи. Давайте предварительно сохраним `unordered_set` генетические коды в первом поколении, и чтобы проверить, встречался ли полученный код среди кодов в первом поколении, будем использовать не линейный поиск, а запросы к `unordered_set`. Время работы такого решения будет $\mathcal{O}(n^3)$.

Для решения предпоследней подзадачи заметим, что чтобы получить какую-то строку q, являющуюся циклическим сдвигом s, в ходе рекомбинации, надо взять два циклических сдвига, у первого из которых символы на нечетных позициях совпадают с символами на нечетных позициях q, а у второго — аналогично с четными позициями.

Посчитаем полиномиальные хеши отдельно на четных позициях строки s, отдельно на нечетных. Соберем хеши всех циклических сдвигов s и положим их в `unordered_set`. Теперь, перебирая i и j для рекомбинации, будем вычислять соответствующие частичные хеши их четных/нечетных позиций и проверять, лежит ли их сумма в посчитанном множестве. Такое решение работает за $\mathcal{O}(n^2)$.

Полное решение требует обратного подхода. Заметим, что количество пар особей, дающих новый код, равно $n^2 - t$, где t — количество пар особей, дающих код из первого поколения. То есть можно найти количество пар, дающих уже существующий код, а затем вычесть это число из общего количества пар.

Для каждого уникального циклического сдвига строки s найдем количество способов его получить в ходе рекомбинации. Для этого, обратно предыдущему решению, заведем множество `cnt`, в котором для каждого хеша циклического сдвига четных/нечетных позиций s будем хранить количество раз, которое он встречается. Количество способов получить q, некоторый циклический сдвиг s, в таком случае равно $\texttt{cnt.count}(q_{\text{even}}) \cdot \texttt{cnt.count}(q_{\text{odd}})$.

Авторам также известно альтернативное полное решение задачи, использующее префикс-функцию. Для него обратимся к ключевой идее, указанной в решении подзадачи 2.

1. Количество уникальных циклических сдвигов s равно ее периоду p.

2. Количество способов получить строку s в ходе рекомбинации равно произведению количества способов выбрать циклический сдвиг с теми же четными позициями и количества способов выбрать циклический сдвиг с теми же нечетными позициями:

   - количество способов перевести четные символы s в четные сдвигом равно $m_{00} = \frac{n}{2p_0}$, где p_0 — период строки s_0 из четных символов s;
   - количество способов перевести нечетные символы s в нечетные, аналогично, равно $m_{11} = \frac{n}{2p_1}$, где p_1 — период строки s_1 из нечетных символов s;
   - количество способов перевести четные в нечетные и наоборот, равно 0, если s_0 и s_1 не являются циклическими сдвигами друг друга, и $m_{01} = m_{00} = m_{11}$ иначе.

Найти период строки можно с помощью префикс-функции ($p = n - \texttt{pf}[n]$, если он является делителем n, иначе $p = n$). Аналогично, с помощью алгоритма Кнута-Морриса-Пратта можно проверить, является ли строка s_1 циклическим сдвигом s_0. В конце останется просто посчитать ответ как

$$n^2 - (m_{00} + m_{01}) \cdot (m_{10} + m_{11}) \cdot p.$$