

New White-Black Tree

Идея: Михаил Мирзаянов

Разработка: Нияз Нигматуллин

Утверждение 1: Дерево можно восстановить по степеням, если сумма степеней равна $2 \cdot (V - 1)$ и каждая степень положительна.

Доказательство: по принципу Дирихле в таком списке степень будет хотя бы две единицы, то есть висячие вершины. Можно брать любую висячую вершину и подсоединять к вершине со степенью больше 1. В таком процессе степень суммарная уменьшается на два, одна вершина уничтожается и каждая степень оставшихся вершин положительна, то есть инвариант сохраняется. Такого сделать нельзя, когда осталось две висячие вершины, их можно просто соединить.

Утверждение 2: В дереве число висячих вершин $= 2 + \sum_{\deg(v) \geq 2} (\deg(v) - 2)$.

Доказательство: Пусть в дереве r висячих вершин. Тогда сумма степеней это $\sum \deg(v) = r + \sum_{\deg(v) \geq 2} \deg(v)$, а сумма степеней это $2 \cdot (V - 1)$. Получается, $2 \cdot (V - 1) - r = \sum_{\deg(v) \geq 2} \deg(v)$,

вычтем из обеих частей $2 \cdot (V - r)$: $2 \cdot (V - 1) - r - 2 \cdot (V - r) = \sum_{\deg(v) \geq 2} \deg(v) - 2 \cdot (V - r)$. Упростим

обе части: $2 \cdot (r - 1) - r = r - 2 = \sum_{\deg(v) \geq 2} (\deg(v) - 2)$. Получается, что $r = 2 + \sum_{\deg(v) \geq 2} (\deg(v) - 2)$.

Для решения задачи проверим, что $\sum w_i + \sum b_i = 2 \cdot (n - 1)$, $\sum w_i$ должна быть четной (из этих двух утверждений следует, что и $\sum b_i$ четна). Если мы сначала построим все белые ребра, то получим несколько компонент связности, а именно $k = \frac{\sum b_i}{2} + 1$ компонент связности. Потому что, если черными ребрами соединяем k компонент, то всего $k - 1$ черных ребер, соответственно $\sum b_i = 2 \cdot (k - 1)$.

По утверждению в начале доказательства, достаточно, чтобы в каждой полученной компоненте суммарная степень черных была положительна, так как сумма степеней четко связана с числом компонент.

Давайте возьмем k вершин с ненулевой черной степенью. Если это сделать нельзя, то решения нет. Дальше каждой вершине подсоединим нужное число белых висячих вершин. Это можно сделать, по утверждению 2, так как есть 2 висячие вершины + $\deg(v) - 2$ висячих для каждой вершины v в компоненте. Так мы построим k компонент, но некоторые вершины не используются. Их возьмем с $\deg(v) - 2$ висячими вершинами, удалим одно ребро из любой компоненты, и вставим эту вершину между ними, удовлетворив степень этой вершины, а у остальных не поменяв ничего.

После этого всего, осталось решить задачу для белых ребер, можно поступить как в доказательстве утверждения 1.

У задачи есть и более простые в реализации жадные решения. Например, работает стратегия, похожая на доказательство бесцветного утверждения 1: взять любую висячую вершину и подвесить ее к невисячей с максимальной степенью соответствующего цвета.