

Journey in Fog

Идея: Дмитрий Саютин
Разработка: Геннадий Короткевич

Заметим, что стратегию Юлии можно описать числами t_1, t_2, \dots, t_n — моментами времени, когда произойдёт встреча, если Джейн движется со скоростью v_1, v_2, \dots, v_n , соответственно. При этом $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ — чем быстрее движется Джейн, тем раньше произойдёт встреча.

На пары значений (t_i, t_{i+1}) можно наложить условия, вытекающие из ограничения скорости Юлии V . Но пока этого делать не будем, а посмотрим на то, как вычислить ответ по заданным t_1, t_2, \dots, t_n .

Зафиксируем i . Встреча происходит в момент времени t_i , а после встречи Юлия потратит время $(L - v_i t_i)/V$ на дорогу домой. Сумма этих значений равна $(L + (V - v_i)t_i)/V$. Видим, что это линейная функция от t_i , причём если $v_i < V$, то коэффициент при t_i положительный, а если $v_i > V$, то отрицательный.

Найдём такое i_0 , что v_{i_0} как можно ближе к V по абсолютному значению. Предположим, что мы зафиксировали t_{i_0} . Тогда все t_i для $i < i_0$ мы хотим минимизировать (поскольку коэффициент при них положительный), а все t_i для $i > i_0$ мы хотим максимизировать (поскольку коэффициент отрицательный). Неформально говоря, это значит, что от позиции, в которой Юлия будет находиться в момент времени t_{i_0} , ей нужно бежать в сторону Джейн с максимальной скоростью, если время течёт «вперёд», и бежать *от* Джейн с максимальной скоростью, если время течёт «назад».

Из этих рассуждений следует наблюдение о форме оптимального ответа: Юлия должна выбрать некоторое время x , которое она будет сидеть дома, а после этого бежать с максимальной скоростью в сторону Джейн, пока не встретит её.

Функция ответа от x является кусочно-линейной и состоит из n кусков. Можно в явном виде построить эту функцию и найти минимум по всех точкам излома, чтобы получить решение за $O(n)$. Также можно заметить или догадаться, что функция ответа от x унимодальна, и использовать тернарный поиск по x , получив решение за $O(n \log n)$.