Game of Annihilation

Идея: Михаил Иванов
Разработка: Михаил Иванов

Если у обоих игроков поровну фишек, то сразу заключаем, что исход — ничья. Допустим, у них не поровну фишек; назовём убегающим того игрока, у которого меньше фишек (и все его фишки будем иногда называть убегающими), и атакующим того игрока, у которого больше (и его фишки будем называть атакующими). Ясно, что исходом игры будет либо ничья, либо победа атакующего игрока. Основная идея решения заключается в том, что у убегающего есть лишь один шанс на ничью: добиться того, чтобы у него появилась фишка, которая правее всех фишек противника, к моменту начала его хода. Тогда убегающий просто ею сбежит в сторону $+\infty$.

Оказывается, критерий, что убегающий может добиться ничьей, такой. Пусть у убегающего игрока n фишек, у атакующего игрока m фишек, $m > n$. Отсортируем все фишки убегающего игрока по убыванию координаты, пусть их координаты $e_1 \geqslant e_2 \geqslant \ldots \geqslant e_n$, а у атакующего — $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m$. Пусть $E_i = \sum_{j=1}^{i} e_j$, $A_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$. Критерий таков: если сейчас ход убегающего игрока, он может добиться ничьей, если и только если существует i от 1 до n, для которого $E_i \geqslant 1 + A_i$. Если сейчас ход атакующего, то убегающий может добиться ничьей, если и только если существует i от 1 до n, для которого $E_i \geqslant 2 + A_i$.

Стратегия за убегающего, если по критерию он может добиться ничьей: взять самое маленькое i, для которого $E_i \geqslant 1 + A_i$, и подвинуть вправо любую фишку с индексом от 1 до i (если отсчитывать фишки справа налево). Легко доказать, что если ход не привёл к аннигиляции, то выполнен критерий ничьей для i ($E_i \geqslant 2 + A_i$), а если привёл к аннигиляции, то для $i-1$ ($E_{i-1} \geqslant 2 + A_{i-1}$). Действительно:

- если взаимно уничтожились две фишки с индексами, не превосходящими i (из всех атакующих фишек при отсчёте справа налево и из всех убегающих фишек при отсчёте справа налево), то сначала к сумме E_i добавили единицу, а потом из обеих сумм E_i и A_i выкинули равные слагаемые, отчего разность между ними не поменялась, но они стали E_{i-1} и A_{i-1} в новой конфигурации;

- если взаимно уничтожились убегающая фишка с индексом, не превосходящим i, и атакующая фишка с индексом $j > i$, то можно заключить, что $e_i < a_j \leqslant a_i$, что значит, что $E_i - A_i < E_{i-1} - A_{i-1}$, поэтому i не было наименьшим индексом, для которого выполнен критерий ничьей.

Аналогично, если выполнено $E_i \geqslant 2 + A_i$ для какого-то i и сейчас ход атакующего игрока, то он ничего с этим не поделает: рассмотрим наименьшее i, для которого $E_i \geqslant 2 + A_i$, тогда после хода атакующего игрока будет выполнено $E'_i \geqslant 1 + A'_i$, если не произошло аннигиляции (или аннигиляция не затронула правые i фишек убегающего игрока), и $E'_{i-1} \geqslant 1 + A'_{i-1}$, если атакующий игрок аннигилировал одну из правых i убегающих фишек.

Если же по критерию атакующий игрок побеждает, то его стратегия такая: если не существует двух атакующих фишек, между которыми расположена убегающая, то атакующий игрок может как угодно наступать своими фишками налево, пока не погубит все убегающие фишки. В противном случае он должен взять самую правую атакующую фишку, справа от которой есть убегающая фишка, и её-то и подвинуть вправо. Нетрудно понять, что если он ходом не произведёт аннигиляции, то инвариант сохранится, а если произведёт аннигиляцию, и инвариант нарушится, то он и до хода нарушался. Убегающий игрок ничего не сможет сделать во время своего хода, если по критерию атакующий побеждает, доказательство аналогично.