Defective Script

Идея: Геннадий Короткевич
Разработка: Никита Голиков

Мы легко можем сделать нагрузку равной 0 на всех серверах, поэтому дальше при поиске ответа лучшего, чем 0, будем считать, что нагрузка на каждом сервере всегда должна оставаться строго положительной.

Заметим, что применив операцию к каждому серверу, мы понизим нагрузку каждого сервера на 3. Таким образом, если существует ответ, в котором итоговая нагрузка каждого сервера равна x, то существует и ответ, в котором итоговая нагрузка равна $x \bmod 3$ (или 3, если x делится на 3). Решим задачу для каждого остатка по модулю 3 независимо и выберем максимальный ответ.

Пусть мы хотим, чтобы в итоге все нагрузки равнялись r $(1 \le r \le 3)$. Обозначим за x_i количество операций, проделанных над сервером i. Тогда итоговая нагрузка на сервере i равняется $a_i - 2x_i - x_{i+1}$, если $i < n$, иначе $a_n - 2x_n - x_1$. Каждая итоговая нагрузка должна равняться r, что приводит нас к системе уравнений.

Перепишем уравнения следующим образом: $x_{i+1} = a_i - 2x_i - r$. Это позволяет нам выразить x_{i+1} через x_i. Выразим все x_i через x_1 следующим образом: скажем, что $x_i = k_i x_1 + b_i$. Для $i = 1$ получаем $k_1 = 1, b_1 = 0$, для $i \ge 2$ подставим выражение для x_{i-1} в уравнение для x_i. Теперь, используя уравнение для x_1, мы получаем, что $x_1 = a_1 - 2k_n x_1 - 2b_n - r$, из чего можно выразить x_1 как $\frac{a_1 - 2b_n - r}{2k_n + 1}$. Используя найденное x_1, можно вычислить все остальные x_i.

Для того чтобы найти максимальную возможную нагрузку для данного остатка, сделаем следующее: найдя x_i, проверим, что все итоговые значения действительно равны r. Если это так, то для нахождения максимальной нагрузки поступим следующим образом: пусть минимальное x_i равняется m, тогда, вычтя из всех x_i число m, мы получим корректный ответ. Тогда максимальное значение нагрузки для данного остатка равняется $r + 3m$.

В данном решении возникает проблема с переполнением, так как коэффициенты k_i и b_i становятся слишком большими. Чтобы решить эту проблему, поступим следующим образом: заметим, что все x_i целые, неотрицательные и не превосходят 10^9, тогда решим систему над полем остатков по модулю $10^9 + 7$. Заметим, что $k_i = (-2)^{i-1}$, и для $i \le 2 \cdot 10^5$ это значение никогда не равно -1 по модулю $10^9 + 7$, поэтому деление на $2k_n + 1$ всегда корректно. Получаем решение за $O(n)$.