Hanoi Towers Reloaded

Идея:	Артем Васильев
Разработка:	Артем Васильев

Решим частный случай: переложить все n дисков со стержня 1 на стержень 3, что в терминах задачи соответствует состояниям `1 1 ... 1` и `3 3 ... 3`. Обозначим нужное число ходов за $f(n)$. Аналогично классической задаче про Ханойские башни, приведем рекурсивный алгоритм. Для нуля дисков нужно ноль ходов: $f(0) = 0$.

Для n дисков рассмотрим, как мы перемещаем самый большой: сначала $1 \to 2$, затем $2 \to 3$. Для хода $1 \to 2$ необходимо, чтобы все остальные диски были на стержне 3, а для хода $2 \to 3$ необходимо, чтобы все остальные диски были на стержне 1. Получаем следующую последовательность действий для n дисков:

- Переложить диски $1 \ldots n-1$ со стержня 1 на стержень 3, рекурсивно за $f(n-1)$ шагов;
- Переложить диск n с 1 на 2;
- Переложить диски $1 \ldots n-1$ с 3 на 1, рекурсивно за $f(n-1)$ шагов;
- Переложить диск n с 2 на 3;
- Переложить диски $1 \ldots n-1$ с 1 на 3, рекурсивно за $f(n-1)$ шагов.

Всего шагов получается $f(n) = f(n-1) + 1 + f(n-1) + 1 + f(n-1) = 3f(n-1) + 2$. Решением этого рекуррентного соотношения является $f(n) = 3^n - 1$.

Заметим, что в этой последовательности нет повторяющихся состояний. Всего различных состояний в этой задаче 3^n: каждый из дисков может быть на одном из трех стержней, порядок дисков на стержне фиксирован. Также, из каждого состояния (кроме `1 1 ... 1` и `3 3 ... 3`) существует ровно два возможных хода: если самый маленький диск находится на стержне 2, его можно переложить на 1 или 3, а если он лежит с краю, то между оставшимися двумя стержнями можно сделать один ход.

Из всех утверждений, описанных выше, можно сделать вывод, что граф переходов между состояниями — гамильтонов путь: все состояния лежат на одной цепочке из `1 1 ... 1` в `3 3 ... 3`, и других переходов нет. Для того, чтобы найти расстояние между двумя произвольными состояниями, найдем позицию каждого из них в этой цепочке и посчитаем разность.

Рекурсивный процесс построения этой цепочки напоминает перечисление чисел в троичной системе счисления: сначала идут все состояния, в которых самый большой диск лежит на стержне 1, потом на 2, и в конце, на 3, что можно соотнести с числами, у которых старший разряд равен 0, 1 или 2. Отличие заключается в том, что если самый большой диск лежит на стержне 2, то все младшие разряды нужно инвертировать: $0 \to 2$, $1 \to 1$, $2 \to 0$. Продолжая этот процесс со всеми дисками от самого большого к самому маленькому, мы можем получить номер состояния в цепочке в троичной системе от 0 до $3^n - 1$.

Переведя два входных состояния в их номер в троичной системе счисления, необходимо их сравнить лексикографически и вычесть меньшее из большего по модулю $998\,244\,353$.