

Всероссийская олимпиада школьников по информатике 2022-2023

Муниципальный этап
Санкт-Петербург, 12 декабря 2022 года

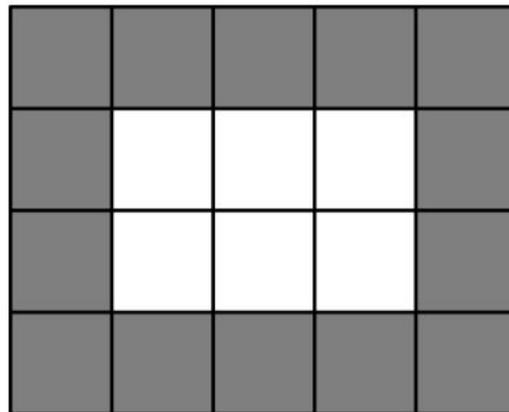
РАЗБОР ЗАДАЧ

Задача А

Дан клетчатый лист бумаги
размера $n \times m$

Раскрасили граничные клетки

Сколько клеток раскрасили?



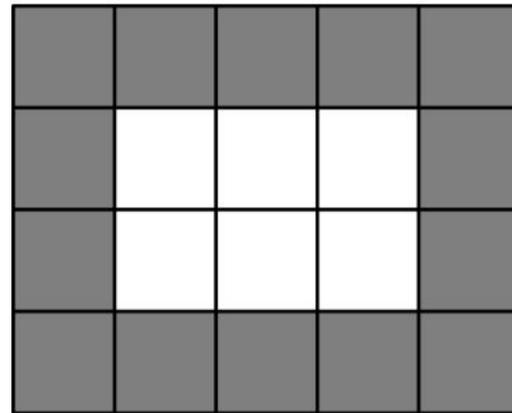
Задача А - решение

В первой строке раскрасили n клеток

В последней строке раскрасили n клеток

В остальных $m-2$ строках раскрасили по 2

Ответ $n + n + 2*(m - 2)$



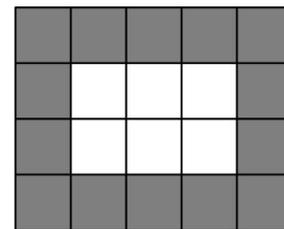
Задача А - решение

В первой строке раскрасили n клеток

В последней строке раскрасили n клеток

В остальных $m-2$ строках раскрасили по 2

Ответ $n + n + 2*(m - 2)$



КРАЙНИЙ СЛУЧАЙ! Если $n = 1$ или $m = 1$, все клетки граничные,
ответ $\max(n, m)$

Задача В

Изобразить сетку $w \times h$

Каждая ячейка размером $k \times k$

Толщина линий t

```
*****  
*****  
**...**...**  
**...**...**  
**...**...**  
*****  
*****
```

Задача В - решение

аккуратно делаем два вложенных цикла

```
for i in range((k + t) * h + t):
    s = ""
    for j in range((k + t) * w + t):
        if i % (k + t) < t or j % (k + t) < t:
            s += "*"
        else:
            s += "."
    print(s)
```

```
*****
*****
**...**...**
**...**...**
**...**...**
*****
*****
```

Задача С

Два различных числа называются непохожими, если они различны и нет двух общих нетривиальных делителей

На отрезке от l до r найти количество непохожих на k

Пример, $l = 1$, $r = 15$, $k = 18$

Ответ:

12

1 2 3 4 5 7 8 10 11 13 14 15

Задача С - решение

Два различных числа непохожи, если их наибольший общий делитель равен 1 или является простым

Найдем для всех чисел x от 1 до r значение $\text{НОД}(k, x)$

Проверим каждый на простоту, перебрав делители до квадратного корня

Посчитаем количество непохожих

Особый случай: $x = k$

Задача С - решение

Наибольший общий делитель - алгоритм Евклида

```
int gcd(int x, int y) {  
    while (y != 0) {  
        int t = x % y;  
        x = y;  
        y = t;  
    }  
    return x;  
}
```

Задача C - решение

Проверка на простоту за квадратный корень:

```
bool is_prime(int x) {  
    if (x == 1) return false;  
    int g = 2;  
    while (g * g <= x) {  
        if (x % g == 0) return false;  
        g++;  
    }  
    return true;  
}
```

Задача C - решение

Подсчет ответа

```
vector<int> ans;
for (int i = l; i <= r; i++) {
    int g = gcd(i, n);
    if (i != n && (g == 1 || is_prime(g))) {
        ans.push_back(i);
    }
}
```

Задача D

Представляем n в виде суммы различных
целых возрастающих слагаемых

Подсчитать количество способов сделать
это, чтобы никакое слагаемое не было
равно среднему арифметическому соседей

$$1+2+6$$

$$1+8$$

$$2+7$$

$$3+6$$

$$4+5$$

$$9$$

Задача D - решение

Научимся сначала генерировать все возможные разбиения рекурсивным перебором

Перебираем очередное слагаемое в возрастающем порядке, ставим очередное слагаемое строго больше, чем предыдущее

Чтобы оставить только хаотические, не ставим, чтобы предпоследнее слагаемое стало равно полусумме соседей

Задача D - решение

Чтобы оставить только хаотические, не ставим, чтобы предпоследнее слагаемое стало равно полусумме соседей

$$a[i - 1] \neq (a[i - 2] + a[i]) / 2$$

$$2 * a[i - 1] \neq a[i - 2] + a[i]$$

$$a[i] \neq 2 * a[i - 1] - a[i - 2]$$

Задача D - решение

— — —

```
void gen(int n, int p) {
    if (n == 0) {
        // вывести ответ
        return;
    }
    int from = 1;
    if (p > 0) from = a[p - 1] + 1;

    for (int v = from; v <= n; v++) {
        a[p] = v;
        gen(n - a[p], p + 1);
    }
}
```

Задача D - решение

— — —

```
void gen(int n, int p) {
    if (n == 0) {
        // вывести ответ
        return;
    }
    int from = 1;
    if (p > 0) from = a[p - 1] + 1;
    int bad = 0;
    if (p > 1) bad = 2 * a[p - 1] - a[p - 2];
    for (int v = from; v <= n; v++) {
        if (v != bad) {
            a[p] = v;
            gen(n - a[p], p + 1);
        }
    }
}
```

Задача E

Дан массив, требуется найти количество подотрезков, сумма на которых делится на k без остатка

Длина массива до 200 000

[1, 2, 3, 4, 5], $k = 2$

Ответ:

[1, 2, 3]

[1, 2, 3, 4]

[2]

[2, 3, 4, 5]

[3, 4, 5]

[4]

Задача E - решение

Когда сумма элементов отрезка с l по r делится на k ?

$$(a[l] + a[l+1] + a[l+2] + \dots + a[r]) \% k == 0$$

Обозначим как $s[r]$ сумму $a[1] + a[2] + \dots + a[r]$

$$\text{Тогда } a[l] + a[l+1] + a[l+2] + \dots + a[r] = s[r] - s[l-1]$$

То есть надо, чтобы $(s[r] - s[l-1]) \% k = 0$

Задача E - решение

Найти количество пар l, r , чтобы $(s[r] - s[l-1]) \% k = 0$

То же самое, что количество пар l, r ($0 \leq l < r \leq n$), что

$$s[r] \% k = s[l] \% k$$

Задача E - решение

Количество пар l, r ($0 \leq l < r \leq n$), что
 $s[r] \% k = s[l] \% k$

Два способа:

- 1) найдем количество C для каждого остатка
сложим значения $C*(C-1)/2$ для всех остатков
- 2) для очередного r прибавим к ответу количество ранее
встретившихся значений с таким остатком

Оба способа используют `std::map`

Задача E - решение

```
std::map<long long, int> cnt;
long long s = 0;
cnt[0] = 1;
long long ans = 0;
for (int i = 0; i < n; i++) {
    s += a[i];
    long long r = s % k;
    if (cnt.count(r) == 0) {
        cnt[r] = 0;
    }
    ans += cnt[r];
    cnt[r]++;
}
```

Задача F

Найти количество способов представить n в виде суммы k слагаемых $n = a[1] + a[2] + \dots + a[k]$, чтобы сумма любых $k-1$ слагаемых была полным квадратом

{1, 22, 41, 58}

$$1 + 22 + 41 = 64$$

$$1 + 22 + 58 = 81$$

$$1 + 41 + 58 = 100$$

$$22 + 41 + 58 = 121$$

Задача F - решение

Раз сумма без любого слагаемого – полный квадрат, в качестве слагаемых можно использовать только числа вида $n - x \cdot x$ для целых x , обозначим их как $b[1], b[2], \dots, b[t]$

Таких чисел порядка квадратного корня из n

Надо посчитать число способов представить n в виде суммы k слагаемых, каждое из заданного массива b

Задача F - решение

Используем динамическое программирование

$dp[n][k][t]$ - число способов представить n как сумму k различных слагаемых из заданного массива, используя слагаемые не с номером не больше t

$$dp[n][k][t] = dp[n][k][t - 1] + dp[n - a[t]][k - 1][t - 1]$$

Время работы порядка $n^{3/2} * k$

Спасибо за внимание

spbmunicipal@gmail.com