

---

# Разбор задачи «Таня, мячи и «исключающее или»»

Авторы задачи:

Владислав Подтёлкин, Сергей Копелиович

Подготовка условия, решения и тестов:

Станислав Наумов

Автор разбора:

Станислав Наумов

В задаче необходимо посчитать сумму «исключающих или» нескольких пар чисел, эта функция считается по битам независимо. Посчитаем для каждого бита, какой вклад он вносит в итоговую сумму.

Пусть  $c_i$  — это количество чисел от 1 до  $n$ , где  $i$ -й бит равен единице, соответственно  $n - c_i$  — это количество чисел, где этот бит равен нулю. Функция  $\oplus$  от двух битов принимает значение 1, если эти биты различны. Поэтому количество слагаемых в итоговой сумме, где  $i$ -й бит равен единице, равно  $c_i \cdot (n - c_i)$ . Тогда, если  $k$  — количество битов в двоичной записи числа  $n$ , то ответ на задачу —

$$\text{это } \sum_{i=0}^k 2^i \cdot c_i \cdot (n - c_i)$$

Научимся быстро считать  $c_i$ . Рассмотрим числа в порядке возрастания от 0 до  $n$  и посмотрим только на  $i$ -й бит. В первых  $2^i$  числах этот бит принимает значение, равное 0, в следующих  $2^i$  — значение, равное 1, и так далее. Нетрудно заметить, что период равен  $2^{i+1}$ . Теперь легко посчитать  $c_i$ , для этого рассмотрим, сколько раз пройдет полный период, и учтем остаток.