Конфликт интересов

Автор задачи: Аслан Тамаев, разработчик: Михаил Иванов

Сначала найдём число способов выбрать высоты горизонтальных сторон одного прямоугольника. Спроецируем для этого прямоугольник на вертикальную ось, он на ней высечет промаркированный отрезок длины H. Нам надо выбрать на нём подотрезок длины не более h. Если длина равна единице, то есть H положений, где его разместить, если двойке, то $H-1$, и так далее — если h, то есть $H-h+1$ положений. По формуле для суммы арифметической прогрессии всего $\frac{(H+(H-h+1))h}{2} = \frac{(2H-h+1)h}{2}$ положений. Аналогично, вертикали для вертикальных сторон можно выбрать $\frac{(2W-w+1)w}{2}$ способами.

Итого есть $\frac{(2H-h+1)h}{2} \cdot \frac{(2W-w+1)w}{2}$ способов выбрать один прямоугольник. Если мы временно забудем про условие, что прямоугольники не пересекаются, то второй прямоугольник можно выбрать столькими же способами, и всего получается $\left(\frac{(2H-h+1)h}{2} \cdot \frac{(2W-w+1)w}{2}\right)^2$ способов выбрать пару прямоугольников.

Теперь надо вычесть количество пересекающихся пар прямоугольников. Заметим, что прямоугольники пересекаются тогда и только тогда, когда пересекаются их проекции на вертикальную ось и пересекаются их проекции на горизонтальную ось. Пусть $P_{H,h}$ — число способов выбрать на промаркированном отрезке длины H два пересекающихся отрезка с целыми концами длины не более h. Тогда количество пересекающихся пар прямоугольников равно $\left(\frac{(2H-h+1)h}{2} \cdot \frac{(2W-w+1)w}{2}\right)^2 - P_{H,h} \cdot P_{H,h}$, и, таким образом, задача решится, как только мы найдём $P_{H,h}$.

Давайте предположим, что на отрезке длины H надо разместить пересекающиеся отрезки длин p и q. Сколько есть способов сделать это? Если $p + q \geqslant H + 1$, то отрезки пересекутся при любом раскладе, то есть способов будет ровно $(H + 1 - p)(H + 1 - q)$. Нам будет удобно переписать это число в более симметрическом виде: $(H + 1)((H + 1) - (p + q)) + pq$.

Что же, если $p+q \leqslant H$? И в этом случае формула есть, правда, немного другая: а именно, из всех $(H+1)((H+1)-(p+q))+pq$ способов надо вычесть те $((H+2)-(p+q))((H+1)-(p+q))$, когда отрезки всё-таки не пересекаются (зафиксируем положение первого отрезка и для него посмотрим, сколько не пересекающихся с ним положений второго отрезка: увидим, что это сначала арифметическая прогрессия, убывающая от $(H+1)-(p+q)$ к нулю, потом постоянный ноль, а потом арифметическая прогрессия, возрастающая назад к $(H + 1) - (p + q)$; удвоенная сумма арифметической прогрессии как раз даст нужный результат). Получится $((p + q) - 1)((H + 1) - (p + q)) + pq$.

Итак, надо перебрать все p от 1 до h, все q от 1 до h, для каждого из них взять $(H + 1)((H + 1) - (p + q)) + pq$, если $p + q \geqslant H + 1$, иначе взять $((p + q) - 1)((H + 1) - (p + q)) + pq$ и всё это сложить. Для начала заметим, что pq можно сложить отдельно, получится $\left(\frac{h(h+1)}{2}\right)^2$, и потом мы это добавим к первому слагаемому. А первое слагаемое зависит только от $p + q$, которое обозначим за s.

Так что надо перебрать все s от 2 до $2h$, для каждого из них взять $(H + 1)((H + 1) - s)$, если $s \geqslant H + 1$, и $(s - 1)((H + 1) - s)$, если $s \leqslant H$, и всё это сложить. А по сколько раз брать слагаемое? Столько раз, сколько способов есть представить s в виде суммы двух слагаемых p и q, каждое из которых от 2 до h. Это число можно выразить как $\min\{s - 1, 2h + 1 - s\}$.

Заметим, что $\min\{H + 1, s - 1\}((H + 1) - s)$ как раз равно $(H + 1)((H + 1) - s)$, если $s \geqslant H + 1$, и $(s - 1)((H + 1) - s)$, если $s \leqslant H$ (если $s = H + 1$, то $(H + 1)((H + 1) - s) = (s - 1)((H + 1) - s)$, поскольку вторая скобка равна нулю). Поэтому итоговая формула такова:

$$P_{H,h} = \left(\frac{h(h+1)}{2}\right)^2 + \sum_{i=2}^{2h} \min\{s-1, 2h+1-s\} \min\{H+1, s-1\}(H+1-s).$$

Если по этой формуле найти $P_{H,h}$ и $P_{W,w}$ и подставить в формулу выше, то ответ будет найден за $\mathcal{O}(\max\{h, w\})$, и эта асимптотика достаточно хороша, поскольку по условию $h, w \leqslant 3 \cdot 10^5$. Заинтересованный читатель спросит: а можно ли решить задачу с временной сложностью $\mathcal{O}(1)$? Что ж, да, можно. Указанная выше сумма может быть ещё лучше свёрнута, хоть этого подвига и не требовалось совершить на олимпиаде. Если $2h \leqslant H$, то

$$P_{H,h} = h^2\left(Hh - \frac{11h^2 - 6h - 5}{12}\right),$$

а если $2h > H$, то

$$P_{H,h} = \frac{5h^4 + (H-1)H(H+1)(H+2) - 10(2H+1)h^3 - 4\left(H^2 + H - 1\right)(2H+1)h + \big(24H(H+1)+1\big)h^2}{12}.$$

В качестве упражнения можете доказать, что при любых целых H и h эти выражения принимают целые значения, а в качестве значительно более сложного упражнения — что не просто целые, а те, что нужно.