Производство роботов

Автор задачи: Константин Бац, разработчик: Мария Жогова

Ограничения первой группы позволяли явно перебрать пары элементов. Для прохождения второй группы нужно было рассмотреть два случая: $a_i \bmod 100 < 50$ и $a_i \bmod 100 \geqslant 50$. Заметим, что в первом случае объединять производство в пары не имеет смысла, так как для таких роботов $\left\lfloor \frac{a_i+a_j}{100} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_i}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_j}{100} \right\rfloor$. Во втором случае имеет смысл объединить в пары производство максимальное количество машин, так как каждое объединение будет дополнительно сохранять одну единицу ресурсов. Поскольку все a_i равны, то объединять пары можно любым способом. Ясно, что можно получить не более $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ пар.

В третьей подгруппе, аналогично, можно было разделить все затраты на производство на две группы: $a_i < 50$ и $a_i = 50$. Ясно, что производство из первой группы не имеет смысла объединять ни с производством из первой группы, ни с производством из второй группы — если $a_i < 50$, то $a_i+a_j \leqslant a_i+50 < 100$, и это не сохранит ни одной единицы ресурсов. С другой стороны, имеет смысл объединить в пары как можно больше производств из второй группы, и каждое объединение даст одну единицу ресурсов. Таким образом, оптимальное распределение будет выглядеть так: $a_i < 50$ не объединяются ни с чем, $a_i = 50$ объединяются между собой.

Для полного решения необходимо заметить, что при формировании пар достаточно рассматривать не сами числа, а их остатки от деления на 100, после чего объединять в пары остатки, дающие в сумме хотя бы 100 (только в таком случае нам удастся сохранить дополнительную единицу ресурсов).

Давайте заменим все a_i на $b_i = a_i \bmod 100$, и отсортируем эти остатки по неубыванию. Посмотрим, с чем можно объединить b_1:

- если $b_1 + b_n < 100$, то его вообще ни с чем не имеет смысла объединять, так как $b_1 + b_i$ будет меньше 100 для любого i;
- иначе, их имеет смысл объединить — действительно, если бы в оптимальном ответе они были заняты в других парах ($b_1 + b_i \geqslant 100$ и $b_j + b_n \geqslant 100$), то и пары $b_1 + b_n$ и $b_i + b_j$ давали бы не худший ответ.

Таким образом, достаточно двигаться двумя указателями l и r навстречу друг другу от самых маленьких ($l = 1$) и самых больших ($r = n$) остатков. Если $b_l + b_r \geqslant 100$, объединяем их в пару и сдвигаем указатели друг к другу — теперь можно повторить аналогичное рассуждение. Иначе, если b_l не с чем объединять, сдвигаем только $l \to l+1$. Время работы такого решения — $\mathcal{O}(n \log n)$ из-за сортировки.

Также заметим, что из-за того, что все остатки лежат от 0 до 99, можно обойтись без сортировки за $\mathcal{O}(n \log n)$, а просто посчитать количество a_i с каждым отдельным остатком по модулю 100 (сортировка подсчетом). Это бы дало время работы решения $\mathcal{O}(n)$, хотя и не было необходимо для получения полного балла.