Установка модулей GAIA

Автор задачи и разработчик: Даниил Орешников

Задача может быть вкратце описана следующим образом: для каждого i от 1 до n выбрать либо p_i, либо $(q \circ p)_i$, чтобы все выбранные числа были различны, и чтобы числа ни из какой пары (a_t, b_t) не были выбраны для i и $i+1$.

Первая подгруппа решается полным перебором всех случаев. Достаточно просто посмотреть на то, какие комбинации могут получиться при тех или иных выборах, и для каждого проверить все необходимые условия. Вторая подгруппа аналогична, однако для ее решения уже не хватит только условных операторов, потребуется написать полный перебор всех вариантов выбора с проверкой условий за время $\mathcal{O}(2^n \cdot n)$.

Третья подгруппа гарантирует, что перестановка p не двигает элементы, то есть для каждого i можно выбрать либо i, либо q_i. Можно также заметить, что пятая группа полностью аналогична — для каждого i можно выбрать либо p_i, либо i. Не теряя общности, расмотрим третью погруппу. Можно было заметить, что множество тех i, для которых выбрано **не** i, должно сохраняться при применении к нему перестановки q, значит должно состоять из одного или более *циклов* перестановки q. На таких циклах в качестве вершин можно построить граф, показывающий, можно или нет эти циклы выбрать вместе, после чего написать перебор с отсечением по времени.

Ограничения четвертой группы гарантируют только одно условие на ненахождение каких-то двух модулей рядом. Если в перестановке p они уже не находятся рядом, достаточно просто выбрать ее. Иначе, надо рассмотреть три случая — когда вместо $q \circ p$ выбрано для a_1, для b_1 и для них обоих, и проверить, подходит ли хотя бы один.

Полное решение можно было получить, сведя задачу к `2-SAT`. Заведем переменную t_i, которая принимает значение `true`, когда выбрана p_i, и `false`, когда выбрана $(q \circ p)_i$. Место, на котором окажется модуль x при выборе p, обозначим p_x^{-1}, и аналогично $(qp)_x^{-1}$ для $q \circ p$.

Теперь для каждой пары (a_i, b_i) переберем все возможные способы их расположения при выборе p или $q \circ p$ (их всего четыре). Например, $x = p_{a_i}^{-1}$ и $y = (qp)_{b_i}^{-1}$. Если $|x - y| = 1$, то добавим импликации $t_x \to \neg t_y$ и $t_y \to \neg t_x$, так как эти два выбора не могут быть сделаны вместе. Так мы учтем все условия на соседние модули.

Теперь еще учтем условия вида $t_{p_i^{-1}} \to \neg t_{(qp)_i^{-1}}$ и аналогичное ему обратное, $t_{(qp)_i^{-1}} \to \neg t_{p_i^{-1}}$, что позволит гарантировать, что все конечное назначение тоже будет перестановкой (все модули будут различными, каждый — в своем слоте).

Всего мы получили $\mathcal{O}(n+m)$ условий, на которых мы можем запустить решатель `2-SAT` через выделение компонент сильной связности за время $\mathcal{O}(n+m)$.