Подземная лаборатория

Автор задачи и разработчик: Константин Бац

Переформулируем задачу: дано взвешенное дерево с вершинами-комнатами и ребрами-трубами. Корень дерева находится в самой нижней комнате, длина каждого ребра — разность между глубинами соответствующих вершин. Также в каждой вершине дерева изначально было некоторое количество льда, которое моментально тает от пришедшей сверху воды и начинает стекать вниз по трубе.

Ограничения первой группы тестов позволяли явно просимулировать то, как меняется уровень воды в комнатах и на основании этого ответить на запросы. Для каждой комнаты будем хранить четыре значения — флаг «растаял ли лед», текущий уровень воды, и состояние воды в трубе, ведущей из комнаты вниз. Состояние воды в трубе описывается тем, до какого нижнего уровня она уже опустилась, и, если вода в комнате уже закончилась, то на каком уровне находится самая верхняя оставшаяся единица воды в трубе.

Будем за один шаг увеличивать время на 1, и обрабатывать комнаты в порядке увеличения глубины:

- если в комнате i растаял лед и там больше 0 воды, изменим уровень воды на -1, увеличим нижний уровень воды в трубе на $+1$;
- если в трубе верхний уровень больше 0, то увеличим оба уровня на $+1$ (весь «отрезок» воды переместился на 1 вниз);
- если нижняя граница воды в трубе меньше нуля (это значит, что вода уже дотекла до следующей комнаты b_i), отметим, что в комнате b_i растаял лед (если он до этого был замерзшим, выставим уровень воды равным a_i) и увеличим уровень воды в комнате b_i на $+1$.

Стимуляцию стоит проводить до тех пор, пока вода не прекратит движение. Для каждой комнаты можно в любой удобной структуре данных хранить «график» количества воды в ней. Если посчитать на нем суффиксные суммы, на запросы можно будет отвечать за $\mathcal{O}(1)$. Время работы такого решения — $\mathcal{O}(T \cdot n + m)$, где T — время, за которое вода из комнат дотечет до самой глубокой комнаты и вытечет из нее.

Для решения следующих подгрупп следует обратить внимание на то, как изменяется уровень воды в комнатах, которые находятся под землей. Для начала можно (например, по индукции по глубине) доказать, что лед в комнате на глубине d_i тает ровно в момент времени d_i, потому что вода «непрерывно» движется вниз со скоростью 1.

Более того, вода из всех труб, ведущих в конкретную комнату, начнет поступать в нее одновременно, после чего скорость роста воды в ней будет равна $|\texttt{children}(i)| - 1$. Опять же, по индукции, можно доказать, что каждая комната является непустой в течение непрерывного промежутка времени. Поэтому:

1. после того, как последние единицы воды вытекут из комнаты, в ней больше никогда не появится вода;
2. скорость поступления воды в комнату будет монотонно уменьшаться с тем, как она будет заканчиваться в комнатах над ней, пока не достигнет нуля;
3. когда вода закончится в последней трубе, ведущей в комнату, уровень воды в комнате начнет уменьшаться со скоростью 1, пока она в ней не закончится.

Во второй группе в качестве дерева был дан бамбук. Это позволяет заметить, что вся вода, которая попадает в комнату, сразу же уходит ниже, и в комнате не скапливается (скорость роста воды равна 0). Пользуясь этим, можно было для каждой комнаты в порядке увеличения глубины подсчитать h_i^{stop} — время, в которое вода прекратит поступать из комнаты сверху. Как уже было сказано, лед в комнате i тает в момент d_i, поэтому с момента d_i минут по h_i^{stop} минут уровень воды будет в точности равен a_i, после этого в течении a_i минут он будет уменьшаться со скоростью 1. Это позволяет отвечать на запросы за время $\mathcal{O}(1)$.

В третьей группе было дано полное двоичное дерево, и все трубы были равной длинны. Это ограничение гарантировало, что для всех вершин «на одном уровне» уровень воды будет меняться одинаково. И для каждой вершины изменение уровня воды будет проходить в два этапа: сперва уровень будет расти со скоростью 1, а затем, когда вода перестанет течь из верхних комнат, уровень воды будет уменьшаться со скоростью 1. Для ответов на запросы можно было вывести формулу, соответствующую такому процессу.

В подзадачах четыре и пять можно было в той или иной мере неэффективно применить идею полного решения.

Как уже было сказано выше, уровень воды в комнатах сперва монотонно возрастает, а потом монотонно убывает. Ясно, что изменение уровня воды напрямую зависит от скорости поступления воды в комнату. Если в комнату поступает вода из v труб, то за одну минуту уровень воды повышается на $v - 1$. Поэтому максимальный уровень воды достигается, когда все трубы, кроме одной, перестают давать воду.

Для полного решения следовало для каждой комнаты создать массив событий, описывающих изменение скорости роста. Обрабатывая комнаты в порядке возрастания их глубины, несложно определить, в какие моменты будет меняться скорость: если комната i станет полностью пустой в момент времени t, то в момент времени $t + d_{b_i} - d_i$ скорость роста уровня воды в комнате b_i уменьшится на 1. Все такие события, плюс событие «в момент времени d_i скорость роста становится равна $|\texttt{children}(i)|$», можно отсортировать по возрастанию момента времени, после чего посчитать на них префиксные суммы скоростей с учетом длин интервалов времени (это и будут уровни воды в моменты изменения скорости).

Тогда для ответа на запрос достаточно с помощью бинпоиска по «растущей» части массива событий найти первый момент времени, в который уровень достигает x, и вычесть его из последнего момента, когда уровень равен x. Последний момент найти еще проще — он случается, когда все трубы над комнатой опустели, и уровень воды в комнате снижается. Зная момент последнего события и уровень воды на этот момент, можно найти интересующий нас конец интервала. Такое решение будет работать за $\mathcal{O}((m + n) \cdot \log n)$.