

Массивы Росوماхи: математическая ловкость и фантазия

Авторы задачи и разработчики: Антон Вдовин и Даниил Орешников

Сделаем несколько наблюдений:

1. из любых трех подряд идущих чисел будет не более одного четного; следовательно, не более $\frac{n}{3}$ чисел будут четными;
2. если нечетные числа расположить подряд, то они всегда будут удовлетворять условию: действительно, разница между двумя нечетными числами на расстоянии не больше двух будет четной и будет не превосходить 4, следовательно, общих делителей у них не будет.

Докажем, что в большей части случаев задача решается и для $n \geq \frac{3m}{4}$. Для этого достаточно построить массив, содержащий все нечетные числа от l до r и ровно половину четных. Сначала расставим нечетные: это логично сделать в соответствии с наблюдением выше, упорядочив их подряд. Оставим при этом каждое третье место под какое-то четное число. Получим последовательность вида

$$1, 3, ?, 5, 7, ?, 9, 11, ?, 13, 15, \dots$$

(здесь для примера взято $l = 1$). Как расположим четные числа? Заметим, что чтобы каждое четное было различным, достаточно расположить на месте $?$ четные, равные полусумме стоящих рядом нечетных. То есть:

$$1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, \dots,$$

но такое распределение не работает — на расстоянии 2 оказались числа 12 и 9.

Исправим возникшую проблему:

- заметим, что единственный общий делитель, который мог появиться — это 3, так как элементы вокруг четного числа t равны $t - 3, t - 1, t + 1, t + 3$;
- заметим также, что такая проблема возникает у каждого третьего четного числа, а также что четные числа идут с шагом 4, то есть ни для какого взятого четного t не использовано ни $t - 2$, ни $t + 2$;
- если же мы заменим t на $t - 2$ или $t + 2$, мы получим «блок» $[t - 3, t - 1, t \pm 2, t + 1, t + 3]$, в котором общие простые делители могут быть только 3 или 5.

Остается только заметить, что если t делилось на 3, то ни $t - 2$, ни $t + 2$ не делятся на 3, а также хотя бы одно из них не делится на 5. Выберем его и поставим вместо t . В итоге мы использовали все нечетные и ровно половину четных, то есть ровно $\frac{3m}{4}$ различных чисел.

Чтобы решить исходную задачу, повторим тот же шаблон, пока числа не закончатся, а затем просто заиклим последнюю тройку: x, y, z, x, y, z, \dots . С учетом округления вниз и -1 в требовании к количеству различных чисел, такое решение проходит все тесты.