

# Потеря медальона

Автор задачи: Артемий Блинов, разработчик: Павел Скобелкин

Для начала заметим, что не более чем за  $x - 1$  запрос мы можем узнать остаток при делении на  $x$  текущей координаты медальона с помощью следующего алгоритма:

1. сделаем запрос числом  $x$ ;
2. если получим ответ 1 — значит координата делится на  $x$ , то есть имеет остаток 0 при делении на  $x$ ;
3. если получим ответ 0, то продолжим алгоритм, пока не встретим число 1.

Тогда, если мы потратили  $y$  действий, значит  $y - 1$  раз мы получили ответ 0, на  $y$ -й запрос получили ответ 1. Тогда понятно, что изначальная константа имеет остаток  $y - 1$  при делении на  $x$ . Также заметим, что последний ( $x$ -й) запрос можно не делать, если мы до него дошли, ведь в таком случае мы гарантировано получим ответ 1. Тогда, не более чем за  $x - 1$  запрос можно получить остаток при делении на  $x$  начального числа.

Важно отметить, что также можно находить остатки при делении на несколько чисел — после нахождения остатка начального числа (назовем его  $s$ ) при делении на  $x_1$  (назовем остаток  $p_1$ ) можно запомнить, сколько мы вычли из изначального числа, и после этого найти остаток при делении на  $x_2$  числа  $s - p_1$ , тогда  $s - p_1 \equiv p_2 \pmod{x_2}$ , значит  $s \equiv p_1 + p_2 \pmod{x_2}$ .

Тогда, с помощью описанного выше алгоритма найдем остатки при делении начальной координаты  $s$  на первые семь простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. После будем иметь систему:  $\forall 1 \leq i \leq 7, s \equiv r_i \pmod{p_i}$ . Всего на это мы потратим  $\sum_{i=1}^7 (p_i - 1) = 1 + 2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 16 = 51$  запрос.

В конце воспользуемся Китайской теоремой об остатках, которая говорит о единственности такого  $x$ , что  $0 \leq x < \prod_{i=1}^n m_i$  и  $\forall 1 \leq i \leq n$  можно записать  $x \equiv r_i \pmod{m_i}$ , при условии взаимной простоты  $m_i$ . В нашем случае модули очевидно взаимно просты (это различные простые), тогда в границах от 0 до  $\prod_{i=1}^7 p_i = 510510$  существует единственное число  $s$ , подходящее заданным условиям.

Для поиска этого ответа воспользуемся алгоритмом Гарнера для решения системы в условиях КТО, или даже просто переберем все возможные числа от 0 до  $5 \cdot 10^5$  и проверим совпадение остатков. Даже решение без алгоритма Гарнера укладывается в ограничения по времени, так как сумма ответов по всем тестовым случаям не превосходит  $5 \cdot 10^5$ .