

Героический поступок

Автор задачи: Александр Гордеев, разработчик: Константин Бац

В задаче требовалось соединить три точки линиями так, чтобы линии шли по вертикалям или горизонталям клетчатой сетки и при этом имели минимальную суммарную длину.

Рассмотрим линию, которая в соответствии с условием соединяет две точки, например, первую и вторую. Длина такой линии — *манхэттенское расстояние* между двумя точкам, которое равно $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Заметим, что то же самое касается и кратчайших расстояний между остальными парами точек.

Давайте докажем, что итоговый ответ можно найти по формуле $d(i, j) = \max(x_i) - \min(x_i) + \max(y_i) - \min(y_i)$. К этому можно прийти двумя способами:

1. Более интуитивный способ, который сложнее доказать — заметить, что так как любые две точки должны быть соединены, путь между точками i и j будет не короче $|x_i - x_j| + |y_i - y_j|$. При этом если мы проведем провода так, что они будут представлять три ломаных из трех наших точек в одну и ту же точку плоскости «между ними», то каждая эта ломаная войдет в два пути. Поэтому ответ равен

$$0.5 \cdot (d(1, 2) + d(2, 3) + d(1, 3)),$$

что, в свою очередь, равно полусумме $(\max - \text{mid}) + (\text{mid} - \min) + (\max - \min)$, то есть просто $\max - \min$ по каждой из координат.

2. Либо можно было заметить, что нам понадобится минимум $\max x_i - \min x_i$ горизонтальных отрезков, чтобы соединить две наиболее удаленные по горизонтали точки, и то же самое по вертикали, поэтому меньшего ответа добиться нельзя. А пример с таким ответом строится достаточно тривиально (в зависимости от того, является ли «средняя» по x точка минимальной или максимальной по y , или нет).