

Милпул и Догпуля

Автор задачи: Егор Юлин, разработчик: Даниил Орешников

К ответу можно было прийти, сначала придумав достаточно наивное решение. Оно заключается в том, чтобы выписать n побитово в двоичной системе счисления, дописывая перед каждым битом 0, а в конце дописав бит 1. Тогда при восстановлении числа достаточно найти первую единицу на четной позиции, обрезать полученную строку q по ней, и перевести левую часть из двоичной системы в десятичную.

Однако такое решение требует от строки s быть длины $2\log_2 n + 1$. Альтернативный способ — закодировать число так, чтобы в его коде какая-то последовательность бит гарантированно не встречалась, и завершить код этой последовательностью. Тогда процесс слабо отличается от описанного выше.

Основная идейная сложность этой задачи — это понять, при чем тут $\sqrt{2}$. Правильный ответ — ни при чем, кроме того, что значения $\sqrt{2}$ и $\frac{1}{\log_2 \phi}$ очень близки друг к другу (≈ 1.41 и ≈ 1.44). Здесь за ϕ обозначено золотое сечение — решение уравнения $x^2 - x - 1 = 0$.

Поэтому значение $\sqrt{2}\log_2 n$ достаточно близко к значению $\log_\phi n$, особенно учитывая, что при $n \leq 10^{18}$, $\log_\phi n < 90$.

А этот вывод (либо дальнейшие рассуждения от наивного решения, что нам хочется гарантировать отсутствие какой-то последовательности бит в коде) уже должен натолкнуть на *фибоначчиеву систему счисления*. Ее полезное свойство в том, что в ней никогда не встречаются два единичных бита подряд.

Таким образом:

1. Для первого запуска посчитаем все числа Фибоначчи до 10^{18} и пройдемся по их уменьшению: если n меньше этого числа, выпишем 0, иначе выпишем 1 и уменьшим n . В конец допишем последовательность бит 110 или 011, после чего выведем полученный результат.
2. Для декодирования разрежем полученную строку по 110 или 011 (в зависимости от того, что было использовано), и декодируем тем же образом часть слева от этой тройки бит.

В ограничениях данной задачи такой метод позволял уложиться в ограничение на длину строки, так как числа Фибоначчи растут со скоростью $F_n \approx \phi^n$, а поправка на разницу между $\sqrt{2}\log_2 n$ и $\log_\phi n$ не превосходит 2.