

Заккрыть порталы

Автор задачи и разработчик: Даниил Орешников

Это вариация классической задаче о дереве Штейнера — минимальном остовном дереве графа, соединяющем множество заранее заданных вершин. Для произвольного числа выбранных вершин эта задача является NP-трудной, однако данная задача сводится к задаче о дереве Штейнера для трех вершин.

Нам требуется выбрать некоторое множество вершин, чтобы по ним можно было добраться от любого из трех изначально заданных **связных** множеств вершин до другого. Обозначим изначально-ные множества за A_1 , A_2 и A_3 , а искомое множество связывающих их вершин — за B . Тогда заметим, что каждая из вершин B лежит на каком-то пути между A_i и A_j для $i \neq j$, иначе эту вершину можно удалить, и ответ станет меньше.

Посмотрим, как множество B может выглядеть.

1. Рассмотрим путь $p_{1,2} \subseteq B$ между A_1 и A_2 , и аналогичные пути $p_{1,3}$ и $p_{2,3}$. Заметим, что $B = p_{1,2} \cup p_{1,3} \cup p_{2,3}$, все остальные вершины можно удалить.
2. Пусть какие-то два из этих путей, например, $p_{1,2}$ и $p_{1,3}$, не пересекаются. Тогда заметим, что существует путь от A_2 до A_3 через A_1 , поэтому $B = p_{1,2} \cup p_{1,3}$.
3. Если же любые два выбранных пути пересекаются, то рассмотрим v — какую-то из вершин на пересечении $p_{1,2}$ и $p_{1,3}$. Заметим, что если оставить в B только $p_{1,2}$ и часть $p_{1,3}$ от v до A_3 , то также все множества будут взаимодостижимы, поэтому $B = \bigcup_{i=1}^3 \text{path}(v, A_i)$.

Итого, B можно получить либо как объединение двух минимальных путей между двумя парами данных множеств, либо как объединение трех кратчайших путей от некоторой вершины v до каждого из множеств. Чтобы все эти кратчайшие пути вычислить, сделаем множественный bfs из каждого из A_i и найдем $d_i(v)$ — длину кратчайшего пути от какой-то из вершины A_i до v .

Теперь если обозначить за $D_i(j)$ величину $\min_{v \in A_j} d_i(v)$, ответ равен

$$\min \left(D_1(2) + D_1(3), D_2(1) + D_2(3), D_3(1) + D_3(2), \min_{v=1}^n (d_1(v) + d_2(v) + d_3(v) + 1) \right).$$

Только надо аккуратно учесть, что расстояния надо считать в вершинах, а не в ребрах.