

Простая игра

Автор задачи и разработчик: Павел Скобелин

В игре выигрывает тот, после чьего хода сумма чисел становится простым числом. Давайте обозначим: $s = A + B$. Тогда, если мы уменьшаем/увеличиваем числа A/B на какие-то значения, то s изменится на такое же значение. Обозначим за l наибольшее простое число, меньшее s , а за r — наименьшее простое число, большее s . Заметим, что в пределах игры (кроме, может быть, последнего хода) сумма текущих A и B будет лежать в пределах от l до r . Действительно, если в какой-то момент игрок «перепрыгнул» l или r , то он мог этим ходом выиграть.

Как найти l и r ? Очень просто, для этого нужно понять факт, что l и r — соседние простые числа, а расстояние между соседними простыми числами до 10^9 **не превосходит** 300 (эмпирическое наблюдение). Тогда можно найти эти границы наивно, проверяя числа на простоту проверкой делителей до корня. Эта часть будет работать за $\mathcal{O}(\sqrt{A+B} \cdot 300)$.

В начале стоит проверить, что Зельда сможет выиграть за один ход. В каком случае она может это сделать? Она может или прибавить что-то к числу B , в таком случае должно выполняться неравенство $s + k \geq r$. Также она может вычесть что-то из числа A , в таком случае должно выполняться $s - k \leq l$, но в этом случае нужно не забыть про то, что A должно оставаться натуральным: то есть $A - (s - l) \geq 1$.

Если Зельда не может выиграть за один ход, подумаем про выигрышные и проигрышные позиции. Выигрышной суммой назовем такую, что, начиная с такой суммы, игрок может выиграть, проигрышной суммой — не выигрышную. В таком случае можем считать r проигрышной суммой. Тогда все суммы в промежутке $[r - k, r)$ — выигрышные. Но тогда сумма $r - (k + 1)$ — проигрышная. Рассуждая так далее, несложно понять, что проигрышными суммами являются только суммы вида $r - (k + 1) \cdot z, z \in \mathbb{N}$ (удобно представить в виде таблицы, в которой пометать выигрышные и проигрышные позиции). Тогда, если $(r - s) \bmod (k + 1) = 0$, то Зельда не сможет выиграть, иначе сможет.

Итого получаем решение за $\mathcal{O}(\sqrt{A+B} \cdot 300)$ на один набор входных данных.