

Коллекция ягод

Автор задачи и разработчик: Егор Юлин

Во первых заметим, что суммарную красоту ягод на отрезке можно считать как $g(r) - g(l - 1)$, где $g(x) = \sum_{j=0}^x f(j)$. Тогда научимся находить только $g(x)$, и этого будет достаточно, чтобы решить задачу.

Для этого будем идти итеративно. Найдем самую большую степень двойки, не превосходящую x (по сути старший бит числа): пусть она равна c , то есть $x = 2^c + d$, где $d < 2^c$. Тогда очевидно, что все числа от 0 до 2^c нам подходят, и посчитать сумму $\sum_{j=0}^{2^c-1} f(j)$ несложно: это будут произведения всех подмножеств $\{a_i\}_{i=0}^{c-1}$, то есть

$$1 + a_0 + \dots + a_{c-1} + a_0 a_1 + \dots + a_{c-2} a_{c-1} + \dots + a_0 a_1 \dots a_{c-1}.$$

Такая сумма легко записывается в виде выражения $(1 + a_0) \cdot \dots \cdot (1 + a_{c-1})$: действительно, из каждой скобки можно выбрать либо a_i , либо единицу, и получить слагаемые, соответствующие всем возможным подмножествам $\{a_i\}$.

После остается только посчитать $\sum_{j=2^c}^x f(j)$, но тут достаточно заметить, что каждое $f(j)$ будет делиться на a_c , а именно, будет равно $a_c \cdot f(j - 2^c)$. Таким образом, эта сумма считается как $a_c \cdot \sum_{j=0}^{x-2^c} f(j)$, и эту сумму уже можно посчитать рекурсивно тем же способом. Повторим такие действия, пока не получим $x = 0$, и это займет не более $\log_2 x$ таких переходов.

Соответственно, на запрос можно ответить за $\mathcal{O}(\log r + \log l)$, то есть $\mathcal{O}(n)$.