

Побег от зомби

Автор задачи и разработчик: Павел Скобеллин

Для каких-то продвижений по задаче нужно было понять более простой способ вычисления функции f .

Покажем, что существует путь минимальной длины до точки (x, y) , такой, что он состоит только из ходов длины 1.

Несложно показать, что любой ход на x , где $x > 2$, строго выгоднее заменить на 5 ходов: $1 + 1 + (x - 2) + 1 + 1$, так как

$$1^2 + 1^2 + (x - 2)^2 + 1^2 + 1^2 = x^2 - 4x + 4 + 4 = x^2 - 4x + 8 < x^2$$

Далее нужно показать, что можно заменить все отрезки длины 2, и получить ответ не хуже. Но, на самом деле, это не было необходимо: Даже имея этот факт, несложно показать, что функция f выглядит так: $f(x, y) = 2 \cdot \max(|x|, |y|) - ((x + y) \bmod 2)$. Это можно показать по индукции.

Далее, понимая, как выглядит функция, есть несколько решений. Первое решение — бинарный поиск. Для начала, нужно добиться такого, чтобы у загаданной точки координата по оси OX совпадала с координатой по оси OY . Как такое сделать? Для удобства, первым действием можно было передвинуть точку в первую четверть. После этого заметим, что если мы уменьшим меньшую координату на четное число, то наша функция никак не изменится, а если большую — то изменится. Значит, несложно за 1 запрос понять, какая координата больше. Далее, можно было делать бинарный поиск, чтобы понять, в какой момент функция начнет изменяться относительно изначальной позиции. То есть, если $f(x, y) = f(x + 2, y) = \dots = f(x + 2k, y) < f(x + 2k + 2, y) < f(x + 2k + 4, y)$, значит, что $y \in [x + 2k, x + 2k + 2)$. После этого аккуратным разбором случаев можно было добиться уравнивания координат.

Теперь мы знаем, что $x = y$. Тогда, если мы будем поддерживать инвариант, будет выполняться $f(x, y) = 2 \cdot x$. Значит, нам нужно уменьшать x (и y), пока функция расстояния не начнет снова расти. Этот момент нужно найти бинарным поиском — несложно показать, что это единственный момент, в который координата точки будет $(0, 0)$.

Таким образом, решение работает за 2 бинарных поиска, требующих порядка 32 запросов, что легко укладывается в ограничения.