

Лабиринт Кошмаров

Автор задачи: Даниил Орешников, разработчик: Степан Мишанин

Если говорить более формально, то в задаче от нас требуется найти гамильтонов цикл в дереве, в которое добавили ребра между всеми вершинами на расстоянии не больше трёх. Очевидно, что явно построить такой граф, дополнив дерево ребрами мы не можем, ведь в худшем случае такой граф будет полным, — но для решения это и не потребуется, просто в дальнейшем будет считать, что из текущей вершины нашего дерева можно переместиться в любую вершину на расстоянии не больше трёх.

Покажем теперь, как можно в нашем дереве найти гамильтонов путь, начинающийся в корне и заканчивающийся в одном из его детей. Решать эту задачу будем рекурсивно. Пусть сейчас мы рассматриваем вершину v , у которой имеется k детей $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$. Будем по очереди рассматривать всех её детей, тогда у нас возможны два случая:

- Если у рассматриваемой вершины u_i есть дети, будем по очереди перемещаться в них (мы это можем сделать, так как расстояние между v и любым ребёнком u_i равно двум) и решать задачу рекурсивно для них. Напомним, что мы ищем гамильтонов цикл, начинающийся в корне и заканчивающийся в одном из его детей. Тогда, решив задачу для какого-то ребёнка t_m вершины u_i , мы окажемся в каком-то из детей t_m и можем из него переместиться в следующего ребёнка u_i , так как расстояние между ними будет равно трём. В конце остаётся только переместиться в вершину u_i , что также возможно, так как расстояние между u_i и любым ребёнком её ребёнка равно двум.
- Если у рассматриваемой вершины u_i нет детей, то добавим u_i в ответ будто бы мы зашли в неё и продолжим рассматривать детей v . Тогда если у следующего ребёнка u_j тоже нет детей, мы можем переместиться в него, так как расстояние между u_i и u_j равно двум, иначе — следуя описанному в первом пункте, мы переместимся в какого-то ребёнка u_j , что также возможно, так как расстояние между u_i и ребёнком u_j равно трём.

С помощью описанного способа найдем гамильтонов путь в нашем дереве. Так как он завершится в каком-то из детей корня, нам остаётся только переместиться из этого ребёнка в корень и мы получим требуемый в задаче цикл.